

Abiturprüfung 2004

1 ANALYSIS



Mathematik Leistungskurs – Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile, die mit „NUR LK“ (nicht abgestuftes LF) oder „NUR GK“ (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind.

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a: f_a(x) = x \cdot \sqrt{a-x} \quad ; \quad x \in D_a; a > 0$$

Ihr Schaubild sei K_a .

1.1 Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung $f'_a(x)$ und $f''_a(x)$.

$$(Zur Kontrolle: f'_a(x) = \frac{2a-3x}{2\sqrt{a-x}}; f''_a(x) = \frac{-4a+3x}{4(a-x)\sqrt{a-x}})$$

1.2

1.2.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge D_a von f_a an.

1.2.2 Untersuchen Sie K_a auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse sowie auf Hoch- und Tiefpunkte.

$$(Teilergebnis: Hochpunkt $H(\frac{2a}{3} | \frac{2a}{9} \cdot \sqrt{3a})$)$$

1.2.3 Zeigen Sie, dass K_a keine Wendepunkte besitzt.

1.2.4 Untersuchen Sie K_a auf Asymptoten.

1.2.5 Zeichnen Sie K_6 für $-2 \leq x \leq 6$. (Längeneinheit 1cm)

1.3 Geben Sie die Ortslinie der Hochpunkte aller Kurven K_a an.

1.4

1.4.1 **NUR LK:**

Die Kurve K_a begrenzt im 1. Feld mit der x-Achse ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt A_K .

Die Punkte $O(0|0)$, $B(a|0)$ und der Hochpunkt H von K_a bilden ein Dreieck mit dem Inhalt A_Δ .

Zeigen Sie: Das Verhältnis $\frac{A_K}{A_\Delta}$ ist unabhängig von a .

1.4.2 **NUR GK:**

Die Kurve K_6 begrenzt im 1. Feld mit der x-Achse ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt.

1.5

1.5.1 **NUR LK:**

Ein Kreis k , dessen Mittelpunkt M auf der x-Achse liegt, berührt K_6 in $C(2|?)$.

Bestimmen Sie die Koordinaten von M .

Bestimmen Sie den Radius des zugehörigen Kreises k .

1.5.2 **NUR GK:**

$C(2|?)$ ist ein gemeinsamer Punkt von K_6 und einem Kreis k mit Mittelpunkt $M(8|0)$.

Zeigen Sie: k berührt K_6 in C .

Abiturprüfung 2004

Aufgabe 2

Analysis



Mathematik Leistungskurs - Leistungs und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile , die mit „Nur LK“ (nicht abgestuftes LF) oder „Nur GK“ (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind

Gegeben seien die Funktionen f mit : $f(x) = (x^2 - \frac{3}{4} \cdot x) \cdot e^{2 \cdot x}$
und die Funktion g mit : $g(x) = x \cdot (x^2 - \frac{9}{16})$

- 2.1 Ermitteln Sie die ersten beiden Ableitungen von f .
- 2.2 Nehmen Sie innerhalb einer Kurvendiskussion zu folgenden Fragen , bzw. Anweisungen Stellung .
 - 2.2.1 Wie lauten die Nullstellen von f ?
 - 2.2.2 Ist die Funktion f symmetrisch zum Ursprung , bzw. zur y-Achse ?
 - 2.2.3 Geben Sie , sofern sie existieren , Asymptoten von f an .
 - 2.2.4 Besitzt f Extremstellen ? Wenn ja , geben Sie diese an , und entscheiden Sie , um welche Art von Extremstellen es sich handelt ! Geben Sie danach die zugehörigen Punkte an .
 - 2.2.5 Ermitteln Sie alle Wendestellen von f .
 - 2.2.6 Skizzieren Sie den Graphen von f . Eine genaue Zeichnung ist nicht erforderlich !
- 2.3 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f durch partielle Integration .
- 2.4 **Nur LK** . Errechnen Sie eine Stammfunktion F von f mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes für F .
- 2.5 Bestimmen Sie die Fläche , die vom Graphen von f und der positiven x-Achse eingeschlossen wird .
- 2.6 Es sei $u < 0$. Bestimmen Sie die von u abhängige Fläche $A(u)$, die vom Graphen von f , der negativen x-Achse und von $x = u$ eingeschlossen wird .

Beachten Sie die 2. Seite zu dieser Aufgabe !!

2. Seite zu Aufgabe 2 :

- 2.7 Nur LK . Existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$? Berechnen Sie im Falle der Existenz seinen Wert .

Beachten Sie bei der Berechnung der Fläche in der nächsten Teilaufgabe , dass Sie im Teil 2.5 schon eine Vorleistung erbracht haben !

- 2.8 Bestimmen Sie die beiden einzigen Schnittstellen der Graphen der Funktionen f und g im Intervall $\left[0, \frac{3}{4}\right]$, und fertigen Sie eine grobe Skizze des Verlaufes der beiden Graphen in diesem Intervall an . Ermitteln Sie danach den Wert der in diesem Intervall von beiden Graphen eingeschlossenen Fläche .

Es genügt die Angabe dieser beiden Schnittstellen ! Der Nachweis , dass es genau zwei Stellen sind , wird in der nächsten Teilaufgabe gefordert .

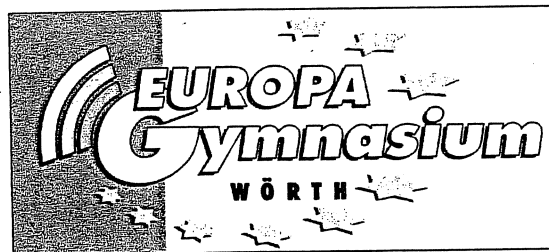
Im Zuge der Schnittstellenbestimmung der beiden Graphen von f und g werden Sie auf die Gleichung $e^{2x} = x + \frac{3}{4}$ stoßen .

- 2.9 Weisen Sie nach , eventuell hilft Ihnen dabei eine Skizze , dass diese Gleichung

2.9.1 Nur GK - im Intervall $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ keine Lösung besitzt .

2.9.2 Nur LK - keine Lösung besitzt .

Abiturprüfung 2004
3
ANALYTISCHE GEOMETRIE



Mathematik Leistungskurs – Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile, die mit „**NUR LK**“ (nicht abgestuftes LF) oder „**NUR GK**“ (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind.

Gegeben sind die Punkte $A(2|-2|1)$, $B(1|2|0)$ und $C(-1|4|1)$ sowie zu jedem $t \in \mathbb{R}$ der Punkt $D_t(9+3t | 3+t | 8+2t)$.
Die Ebene E_1 enthält die Punkte A, B und C.
Die Ebene E_2 hat die Gleichung $x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5 = 0$

- 3.1** Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_1 .
Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte S_1 , S_2 und S_3 von E_1 mit den Koordinatenachsen an.
Zeichnen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ in ein Achsenkreuz ein.
Für welches t liegt der Punkt D_t in der Ebene E_1 ?
Bestimmen Sie für dieses t den Diagonalschnittpunkt H des Vierecks $ABCD_t$.
(Teilergebnis: $E_1: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$)
- 3.2**
- 3.2.1** Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g von E_1 und E_2 .
Unter welchem Winkel schneidet E_2 die x_2x_3 Ebene?
(Teilergebnis: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$)
- 3.2.2 NUR LK:**
Bestimmen Sie den Punkt M der Geraden g , der von A und C die gleiche Entfernung hat.
- 3.2.3 NUR GK:**
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $T(1,5|1,5|-0,25)$ von der Geraden AC.
- 3.3**
- 3.3.1** Der Punkt A der Ebene E_1 wird an der Ebene E_2 gespiegelt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes A' von A.
- 3.3.2 NUR LK:**
Die Schnittgerade g aus Teilaufgabe 3.2.1 und die Verbindungsstrecke AA' schneiden sich im Punkt S.
Bestimmen Sie die Koordinaten von S.
Was kann man aus der Existenz dieses Schnittpunktes über die gegenseitige Lage von E_1 und E_2 schließen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abiturprüfung 2004

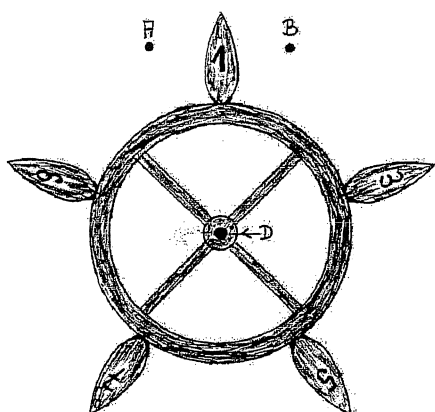
Aufgabe 4

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik



Mathematik Leistungskurs - Leistungs und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile, die mit „Nur LK“ (nicht abgestuftes LF) oder „Nur GK“ (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind



Der Besitzer einer Hafenbar hat sich aus einem alten Schiffssteuerrad ein Glücksrad zusammengebastelt (siehe Bild), das er im Punkt D drehbar an der Wand befestigt hat . Auf die fünf Griffe des Steuerrades hat er die ungeraden Zahlen 1 , 3 , 5 , 7 und 9 geschrieben . In den Punkten A und B hat er an der Wand eine Haltevorrichtung angebracht , die garantiert , dass , wenn das Rad zum Stehen kommt , nur einer der fünf Griffe zwischen A und B steht . Als Ergebnis einer Drehung wird nur die Zahl gewertet , die nach der Drehung zwischen A und B steht .

Weil er nun selbst auch wissen wollte , welche Ergebnisse sich nach dem Drehen des Rades einstellen werden , hat er das Rad eigenhändig mehrmals in Drehung versetzt und festgestellt , dass sich bei 200-maligem Drehen im Mittel folgende Ergebnistabelle ergibt :

Zahl (Ergebnis)	1	3	5	7	9
absolute Häufigkeit	5	10	25	100	60

- 4.1 Erstellen Sie anhand der vorliegenden Tabelle eine Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Größen 1 , 3 , ... , 9 , und fertigen Sie danach eine graphische Darstellung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung an .
- 4.2 Wie groß sind der Erwartungswert und die Standardabweichung der vorliegenden Zufallsgröße ? Interpretieren Sie die beiden Werte !
- 4.3 Gegeben seien die beiden Ereignisse $E = \{ 1 , 9 \}$ und $F = \{ 5 , 7 , 3 \}$.
 - 4.3.1 Ermitteln Sie $p(E)$, $p(F)$ und $p(E \cap F)$.
 - 4.3.2 Sind die Ereignisse E und F unabhängig ? Begründen Sie !

2. Seite von Aufgabe 4 :

Im Folgenden sei A die Menge $A = \{ 1, 3, 5 \}$!

- 4.4 Zeigen Sie kurz , dass $p(A) = \frac{1}{5}$.
- 4.5 Es hat sich im Laufe der Zeit gezeigt , dass sich die einzelnen Wahrscheinlichkeiten nicht ändern , wenn man das Schiffssteuer mehrmals hintereinander dreht . Das heißt , auch die Wahrscheinlichkeit , dass A eintritt ändert sich bei mehrmaligem Drehen nicht !
- 4.5.1 Wie groß ist bei 10-maligem Drehen die Wahrscheinlichkeit , dass das Ereignis A genau 10 mal eintritt ?
- 4.5.2 **Nur LK** . Wie oft muss das Schiffssteuer gedreht werden , damit die Wahrscheinlichkeit , dass das Ereignis A mindestens einmal eintritt , größer als 0,4 ist ?
- 4.5.3 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 100-maligem Drehen , dass das Ereignis A mindestens 21 mal und höchstens 35 mal eintritt ?
- 4.6 **Nur GK** . Wie groß sind der Erwartungswert und die Standardabweichung für das Eintreten des Ereignisses A bei 100-maligem Drehen des Schiffssteuers . Nennen Sie die σ -Umgebung des Erwartungswertes , für die die Wahrscheinlichkeit ungefähr 0,95 ist .
- 4.7 Eines Tages kommt ein Matrose in die Bar und behauptet , die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A würde nicht stimmen , da das Erscheinen für alle Zahlen gleichwahrscheinlich sei . Zum Beweis dreht er das Steuerrad 50 mal und hält fest , dass A dabei 20 mal aufgetreten ist . Der Wirt testet diese Hypothese natürlich sofort auf dem 5% Signifikanzniveau . Zu welchem Ergebnis kommen die beiden .
Beachten Sie dabei , wie A oben festgelegt wurde !
- 4.8 Ein weiterer Gast , der die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht kennt , dreht das Steuerrad 1000 mal und stellt fest , dass A 250 mal eingetreten ist .
- 4.8.1 Bestimmen Sie für ihn nun das 95%-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit von A .
- 4.8.2 Geben Sie die Länge dieses Vertrauensintervalles an .
- 4.8.3 **Nur LK** . Wieviele Drehungen müsste der Gast machen , damit das 95%-Konfidenzintervall höchstens die Länge 0,01 hat ?
- 4.9 **Nur LK** . Eine Landratte dreht das Steuerrad zweimal , als gerade das Licht ausgegangen ist . Als sie zur Rede gestellt wird , gibt sie an , dass die Summe der beiden von ihr wahrgenommenen Zahlen genau 10 gewesen sei . Für welche der Zahlenkombinationen (1,9) , (3,7) oder (5,5) spricht dies am ehesten ?
- 4.10 **Nur GK** . In neuester Zeit wird das Steuerrad stets zweimal gedreht und die Summe der beiden Zahlen als Ergebnis betrachtet . Helfen Sie dem Wirt bei der Aufstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für dieses Spiel .
(Beachten Sie , dass z.B. : $8 \leftrightarrow \{(1,7) , (3,5) , (5,3) , (7,1)\}$)

3. Seite von Aufgabe 4

Tafelwerk und Hilfsangaben

σ -Regeln : $p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.680$

$$p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.955$$

$$p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997$$

Für die beurteilende Statistik sei folgende Tabelle gegeben :

Wahrscheinlichkeit	Radius des Intervalles
0,80	1,28 σ
0,90	1,64 σ
0,95	1,96 σ
0,975	2,33 σ
0,99	2,58 σ

Das 95%-Vertrauensintervall einer beobachteten relativen Häufigkeit h ist für hinreichend große Werte von n näherungsweise :

$$\left[h - 1,96 \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}; h + 1,96 \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$$

Binomialverteilung $F_{n,p}(k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$
 Summenverteilung

		p											
		0,02	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50		
100	0	0,1326	0,476	0,059	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
	1	4033	1946	0371	0003	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	2	6767	4198	1183	0019	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	3	8590	6472	2578	0078	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	4	9492	8179	4360	0237	0001	0000	0000	0000	0000	0000		
	5	9845	9192	6160	0576	0004	0000	0000	0000	0000	0000		
	6	9959	9688	7660	1172	0013	0001	0000	0000	0000	0000		
	7	9991	9894	8720	2061	0038	0003	0000	0000	0000	0000		
	8	9998	9968	9369	3209	0095	0009	0000	0000	0000	0000		
	9	9999	9991	9718	4513	0213	0023	0000	0000	0000	0000		
100	10	9998	9885	8832	0427	0057	0001	0000	0000	0000	0000		
	11	9957	7030	0777	0126	0004	0000	0000	0000	0000	0000		
	12	9985	8018	1297	0253	0010	0000	0000	0000	0000	0000		
	13	9995	8761	2000	0469	0025	0001	0000	0000	0000	0000		
	14	9999	9274	2874	0804	0054	0002	0000	0000	0000	0000		
	15	9601	3877	1285	0111	0004	0000	0000	0000	0000	0000		
	16	9794	4942	1923	0211	0010	0001	0000	0000	0000	0000		
	17	9900	5994	2712	0376	0022	0002	0000	0000	0000	0000		
	18	9954	6963	3621	0630	0045	0005	0000	0000	0000	0000		
	19	9980	7803	4602	0995	0089	0011	0000	0000	0000	0000		
100	20	9992	8481	5595	1488	0165	0024	0000	0000	0000	0000		
	21	9997	8998	6540	2114	0288	0048	0000	0000	0000	0000		
	22	9999	9370	7389	2864	0479	0091	0001	0000	0000	0000		
	23	9621	8109	3711	0755	0164	0003	0000	0000	0000	0000		
	24	9783	8886	4617	1136	0281	0006	0000	0000	0000	0000		
	25	9881	9125	5535	1631	0458	0012	0000	0000	0000	0000		
	26	9938	9442	6417	2244	0715	0024	0000	0000	0000	0000		
	27	9969	9638	7224	2964	1066	0046	0000	0000	0000	0000		
	28	9985	9800	7925	3768	1524	0084	0000	0000	0000	0000		
	29	9993	9888	8505	4623	2093	0148	0000	0000	0000	0000		
100	30	9997	9939	8962	5491	2766	0248	0000	0000	0000	0000		
	31	9999	9969	9307	6331	3525	0398	0001	0000	0000	0000		
	32	9985	9554	7107	4344	0615	0002	0000	0000	0000	0000		
	33	9993	9724	7793	5188	0913	0004	0000	0000	0000	0000		
	34	9997	9836	8371	6019	1303	0009	0000	0000	0000	0000		
	35	9999	9906	8839	6803	1795	0018	0000	0000	0000	0000		
	36	9999	9948	9201	7511	2386	0033	0000	0000	0000	0000		
	37	9973	9470	8123	3068	0060	0000	0000	0000	0000	0000		
	38	9986	9660	8630	3822	0105	0000	0000	0000	0000	0000		
	39	9993	9790	9034	4621	0176	0000	0000	0000	0000	0000		
100	40	9997	9875	9341	5433	0284	0000	0000	0000	0000	0000		
	41	9999	9928	9566	6225	0443	0000	0000	0000	0000	0000		
	42	9999	9960	9724	6967	0666	0000	0000	0000	0000	0000		
	43	9979	9831	7635	0967	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	44	9989	9900	8211	1356	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	45	9995	9943	8689	1841	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	46	9997	9969	9070	2421	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	47	9999	9983	9362	3067	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	48	9999	9991	9577	3822	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	49	9996	9729	4602	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
100	50	9998	9832	5398	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	51	9999	9900	6178	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	52	9942	6914	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	53	9968	7579	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	54	9983	8159	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	55	9991	8644	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	56	9996	9033	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	57	9998	9334	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	58	9999	9557	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	59		9716	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
100	60		9824	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	61		9895	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	62		9940	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	63		9967	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	64		9982	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	65		9991	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	66		9996	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	67		9998	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		
	68		9999	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000		

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000.