Abiturprüfung 2005

Aufgabe 1

Analysis

Mathematik Leistungskurs - Leistungs und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile , die mit „Nur LK" (nicht abgestuftes LF) oder „Nur GK" (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind

---

Gegeben seien die Funktion s mit : $s(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x} - e^{-x}\right)$

und die Funktion c mit : $c(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(e^{x} + e^{-x}\right)$

1.1 Zeigen Sie , dass zwischen den Ableitungen von s und c folgender interessante Zusammenhang besteht :

$$s'(x) = c(x)$$
$$c'(x) = s(x)$$

Welche Konsequenzen hat dies für folgende Stammfunktionen ?

$$\int s(x)dx \quad und \quad \int c(x)dx$$

1.2 Weisen Sie folgende weiteren Eigenschaften der Funktionen s und c nach :

1.2.1 $c(x) > s(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}$

(Hinweis : Betrachten Sie die Funktion : $d(x) = c(x) - s(x)$!)

1.2.2 $c(x) > 0$ für alle $x \in \mathbf{R}$

1.3 Führen Sie eine Kurvendiskussion sowohl für $s(x)$, als auch für $c(x)$ durch !

(Nullstellen , Symmetrien , Asymptoten , Extrempunkte - Maxima und Minima - , Wendepunkte)

Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen in einem Koordinatensystem . Beachten Sie dabei die Ergebnisse aus 1.2 .

2. Seite zu Aufgabe 1

1.4 Bestimmen Sie den Wert der Fläche A(u) , die von den beiden Graphen der Funktionen s und c , der positiven y-Achse und der Senkrechten $x = u$ ($u > 0$) eingeschlossen wird .
Beachten Sie die Ergebnisse aus 1.2 und 1.3 .

1.5 **Nur LK** . Existiert das uneigentliche Integral $\int_0^\infty (c(x) - s(x))\,dx$?
Geben Sie im Falle der Existenz seinen Wert an .

1.6 **Nur GK** - Bestimmen Sie den Wert des Integrales mittels partieller Integration : $\int_{-1}^{1} x^2 \cdot c(x)\,dx$
Beachten Sie bei der partiellen Integration auch die Ergebnisse aus 1.1 .

1.7 **Nur GK** - Zeigen Sie , dass die Graphen der beiden Funktionen f und c mit

$$f(x) = \frac{e^2 + 1}{2 \cdot e} \quad und \quad c(x)\ wie\ gehabt$$

genau im Intervall [-1 ; +1] eine Fläche einschließen !
Fertigen Sie eine Skizze an (Hinweis : $\frac{e^2+1}{2 \cdot e} \approx 1{,}54\ldots$) und ermitteln Sie den Wert dieser Fläche .

1.8 **Nur LK** - Ermitteln Sie eine Stammfunktion des Integranden und bestimmen Sie danach den Wert des Integrales : $\int_0^\pi \sin(x) \cdot c(x)\,dx$
Beachten Sie bei der partiellen Integration auch die Ergebnisse aus 1.1 .

1.9 **Nur LK** - Zeigen Sie unter Verwendung der exakten Zahlen (also keine Näherungen) , dass die Graphen der beiden Funktionen f und c mit :

$$f(x) = -x^2 + \frac{(e+1)^2}{2 \cdot e} \quad und \quad c(x)\ wie\ gehabt$$

genau im Intervall [-1 ; +1] eine Fläche einschließen !
Fertigen Sie eine Skizze an (Hinweis : $\frac{(e+1)^2}{2 \cdot e} \approx 2{,}54\ldots$) und ermitteln Sie den Wert dieser Fläche .

Abiturprüfung 2005

Aufgabe 2

Analysis

Mathematik Leistungskurs - Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile , die mit „**Nur LK**" (nicht abgestuftes LF) oder „**Nur GK**" (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind

---

Gegeben ist die Funktionenschar $f_c\colon x \to \dfrac{x^2+c-4}{x+2}$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

2.1 Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Scharkurven mit den Koordinatenachsen sowie die Gleichungen der Asymptoten. Achten Sie wo nötig auf Fallunterscheidungen.

2.2 **Nur GK:** Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte der Scharfunktion f_1 und die Art dieser Extrempunkte. Was können Sie zu Wendepunkten von f_1 aussagen?

(Kontrollergebnis: $f'_1(x) = 1 - \dfrac{1}{(x+2)^2}$)

2.3 **Nur LK:** Bestimmen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte aller Scharfunktionen f_c und ermitteln Sie die Ortslinien der Extrempunkte der Graphenschar. Was können Sie zu Wendepunkten der Funktionen f_c aussagen?

(Kontrollergebnis: $f'_c(x) = 1 - \dfrac{c}{(x+2)^2}$)

2.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der gewonnenen Ergebnisse im Bereich $-6 \le x \le 4$ die Asymptoten und den Graphen der Funktion f_1 in ein Achsenkreuz mit der Längeneinheit = 1 cm auf beiden Achsen.

Im Folgenden wird die Funktion $F : x \to \int_0^x f_1(t)\,dt$ mit $x > -2$ betrachtet.

2.5 Geben Sie, ohne die Integration auszuführen, die x-Koordinaten der Hoch- , Tief- und Wendepunkte des Graphen von F an.

2.6 **Nur LK:** Bestimmen Sie, ebenfalls ohne die Integration auszuführen, das Monotonieverhalten von F im Bereich $\mathbb{R}^+$ und begründen Sie, warum F dort genau eine Nullstelle x_0 besitzt.

2.7 Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von F(x).
Berechnen Sie - jeweils auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet - $F\left(-\sqrt{3}\right)$ und $F\left(\sqrt{3}\right)$. Geben Sie den Flächeninhalt A des Flächenstücks an, das von der x-Achse und dem Graphen von f_1 umschlossen wird.

Abiturprüfung 2005

Aufgabe 3

Analytische Geometrie

Mathematik Leistungskurs - Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile , die mit **„Nur LK“** (nicht abgestuftes LF) oder **„Nur GK“** (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind.

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die beiden Geradenscharen g_a und h_a

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} ; \quad h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ -3a \\ 2+5a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R};\ r \in \mathbb{R} \text{ und } s \in \mathbb{R}.$$

3.1 Begründen Sie, dass alle Geraden der Schar g_a zueinander parallel sind und dass alle Geraden der Schar h_a einen gemeinsamen Punkt haben.

3.2 Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Schargeraden h_0 und h_4.
Bestimmen Sie, welche Schargerade h_a auf h_0 senkrecht steht.

3.3 Die Ebene G enthält alle Schargeraden g_a. Ermitteln Sie eine Darstellung von G als Koordinaten-Gleichung. Welche besondere Lage hat G im Koordinatensystem?
(mögliches Ergebnis zur Kontrolle: G: $3x_1 - x_3 = 0$)

3.4 **Nur LK:** Weisen Sie nach, dass alle Geraden h_a in der Ebene H: $3x_1 + 2x_2 = 12$ liegen.

3.5 Die Ebenen G und H aus den Teilaufgaben 3.3 bzw. 3.4 schneiden sich in einer Geraden s. Bestimmen Sie eine Gleichung von s.
(Kontrollergebnis: $s = g_6$)

Seite 2 zu Aufgabe 3

3.6 Die Ebene F: $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12$ enthält die beiden Schargeraden g_2 und h_2.
(Nachweis nicht erforderlich)
Zeigen Sie, dass g_2 und h_2 parallel aber nicht identisch sind.

3.7 Berechnen Sie den Abstand der Geraden g_2 und h_2.

3.8 **Nur LK:** Fertigen Sie mit Hilfe der gewonnenen Ergebnisse eine einfache Skizze an (ohne Achsenkreuz), aus der die relativen Lagebeziehungen der Ebenen F, G und H sowie ihrer Schnittgeraden hervorgehen.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Ebenen F, G und H gemeinsame Lotebenen haben.
Geben Sie eine Koordinatengleichung derjenigen Lotebene L an, die den Koordinatenursprung enthält.

Abiturprüfung 2005

Aufgabe 4

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Mathematik Leistungskurs - Leistungs und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile , die mit „Nur LK“ (nicht abgestuftes LF) oder „Nur GK“ (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind

---

Die Leitung eines Freizeitparks hat über Jahre hinweg eine Statistik über die Altersstruktur der Besucher des Parks erstellt , um sich damit die Möglichkeit zu verschaffen , bei zukünftigen Planungen oder Änderungen ihres Angebotes mehr auf die Bedürfnisse der Besucher eingehen zu können . Dabei ergab sich im Durchschnitt bei 1000 Besuchern folgende Altersverteilung :

Altersgruppe	0 - 6	7-11	12-18	19-24	25-32	33-50	51-65	66-100
x_i *(i = 1,2,...,8)*	3	8	15	22	28	40	59	80
absolute Häufigkeit	75	200	25	5	100	260	110	225

4.1 Erstellen Sie anhand der vorliegenden Tabelle eine Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugehörigen Zufallsgröße X , und fertigen Sie danach eine graphische Darstellung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung an . Verwenden Sie Dezimalzahlen ($p = 0{,}01 \leftrightarrow 0{,}5$ cm) !
Es wird dabei vorausgesetzt , dass nach der oben angedeuteten großen Zahl von Überprüfungen die relativen Häufigkeiten identisch mit den Wahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße X sind !

4.2 Wie groß sind der Erwartungswert E(X) , die Varianz und die Standardabweichung $\sigma(X)$ der Zufallsgröße X ? Interpretieren Sie die Werte für Erwartungswert und Varianz mit eigenen Worten !

4.3 Gegeben seien die beiden Ereignisse :
A = $[(X=x_1)$ oder $(X=x_8)]$ und **B** = $[(X=x_1)$ oder $(X=x_2)$ oder $(X=x_6)]$
4.3.1 Ermitteln Sie p(A) , p(B) und $p(A \cap B)$.
4.3.2 **Nur GK** - Sind die Ereignisse A und B unabhängig ? Begründung !
4.3.3 **Nur LK** - Bestimmen Sie $p_B(A)$ und $p_A(B)$. Folgerung ?!

2. Seite von Aufgabe 4 :

Da sich auf dem Freizeitgelände sehr viele Menschen tummeln , darf im Folgenden davon ausgegangen werden , dass sich die in der Tabelle angegebenen Antreffwahrscheinlichkeiten von Personen im Freizeitpark nicht ändern , wenn man verschiedene Personen nacheinander oder in Gruppen betrachtet . Zudem darf angenommen werden , dass bei irgendwelchen Zählungen oder Befragungen innerhalb des Parks die Personen für den Testenden nicht von vornherein einer Altersgruppe zugeordnet werden können .

Weitere Untersuchungen lieferten folgende Zusatzergebnisse :

Zusatzergebnis 1 : Wenn ein Kleinkind $(X=x_1)$ eingelassen wurde , dann war und blieb dieses stets in Begleitung eines Erwachsenen . Zu 70% war der Erwachsene ein Großelternteil $(X=x_8)$ und zu 30% ein Elternteil $(X=x_6)$.

Zusatzergebnis 2 : Ließ man einen jüngeren Jugendlichen $(X=x_2)$ ein , so war und blieb auch dieser stets in Begleitung eines Erwachsenen . Zu 85% war dieser ein Elternteil und zu 15% ein Großelternteil .

Zusatzergebnis 3 : Ältere Jugendliche $(X=x_3)$ kamen und blieben die ganze Besuchszeit zu 90% in Begleitung eines weiteren älteren Jugendlichen !

4.4 In diesem Aufgabenteil soll das Gruppenverhalten von Gruppen zu je zwei Personen betrachtet werden . Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten , dass auf dem Freizeitgelände

4.4.1 **nur GK** - ein Kleinkind (K) angetroffen wird , das als Begleitung ein Großelternteil (G) dabei hat ?

4.4.2 ein jüngerer Jugendlicher (Ü) angetroffen wird , der als Begleitung ein Elternteil (E) dabei hat ?

4.4.3 **nur GK** - zwei ältere Jugendliche (Ä) angetroffen werden .

Zeichnen Sie einen Wahrscheinlichkeitsbaum für Gruppen von zwei Personen , der die Wahrscheinlichkeitsaussagen der Zusatzergebnisse 1 - 3 enthält . Lassen Sie dabei Äste , über deren Wahrscheinlichkeiten Sie keine Aussagen machen können , einfach unbeschriftet ! Sollten es mehrere solcher Äste an einem Knoten sein , dürfen diese durch einen einzigen Ast repräsentiert werden , an dessen Astende das Symbol " NN " geschrieben wird .

In den restlichen Aufgaben wird nur das Antreffen von Personen aus der Altersgruppe "Kinder und Jugendliche" $E = [\,(X=x_1)$ oder $(X=x_2)$ oder $(X=x_3)\,]$ betrachtet !

Zeigen Sie , dass gilt : $\mathbf{p(E) = 0{,}3}$

4.5 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit , dass sich das Ereignis E bei 10-maliger Überprüfung von Personen innerhalb des Freizeitgeländes

4.5.1 genau einmal

4.5.2 höchstens sieben mal , aber mindestens fünf mal

4.5.3 nur beim fünften Mal

einstellt .

3. Seite von Aufgabe 4 :

4.6 **Nur LK** - Wie viele Personen müsste man überprüfen , damit man mit mindestens 99,5% eine Person aus E antreffen würde ?

4.7 Obwohl gewisse Zweifel am Wert für die Wahrscheinlichkeit für die Gruppe der Kinder und Jugendlichen aufgekommen sind , beharrt die Leitung des Parks auf dem alten Ergebnis . Zur Bestätigung von p(E) soll ein erneuter Test beitragen . Bei einer Befragung von 300 Parkbesuchern wird festgestellt , dass 79 Personen davon der Gruppe E angehören .
Ermitteln Sie den Annahmebereich für ein Signifikanzniveau von 5% . Welche Schlussfolgerung wird die Parkleitung aus dem Ergebnis ziehen ?

4.8 Ein unabhängig beauftragter Prüfer , der die Ausgangslage nicht kennt , stellt anhand einer selbst durchgeführten Umfrage unter 2000 zufällig ausgewählten Parkbesuchern fest , dass 640 dieser Parkbesucher der Gruppe E angehören .

4.8.1 Ermitteln Sie daraus das 95% - Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit von E .
Spricht dieses Ergebnis Ihrer Meinung nach für die anfänglich von der Leitung des Parks für E erhaltene Wahrscheinlichkeit ? Begründung !

4.8.1 **Nur GK** - Wie viele Personen müsste der Prüfer befragen , damit das 95% - Vertrauensintervall höchstens die Länge 0,005 hat ?

4.9 **Nur LK** - Wie groß sind der Erwartungswert und die Standardabweichung für das Eintreten des Ereignisses E bei einer Befragung von 100 Personen ? Nennen Sie dazu auch eine σ-Umgebung des Erwartungswertes , deren Wahrscheinlichkeit ungefähr 0,95 ist .

4. Seite von Aufgabe 4

Tafelwerk und Hilfsangaben

Für die beurteilende Statistik sei folgende Tabelle gegeben :

Wahrscheinlichkeit	Radius des Intervalles
0,80	1,28σ
0,90	1,64σ
0,95	1,96σ
0,975	2,33σ
0,99	2,58σ

σ-Regeln : $p(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) \approx 0.680$
$p(\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma) \approx 0.955$
$p(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) \approx 0.997$

Das 95%-Vertrauensintervall einer beobachteten relativen Häufigkeit h ist für hinreichend große Werte von n näherungsweise :

$$\left[h-1{,}96\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}};h+1{,}96\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}\right]$$

Binomialverteilung (Summenverteilung)

$$F_{n,p}(k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^{i}\cdot(1-p)^{n-i}$$ **hier für n=10**

p

k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
0	0,5987	3487	1074	0563	0282	0060	0010
1	9139	7361	3758	2440	1493	0464	0107
2	9885	9298	6778	5256	3828	1673	0547
3	9990	9872	8791	7759	6496	3823	1719
4	9999	9984	9672	9219	8497	6331	3770
5		9999	9936	9803	9527	8338	6230
6			9991	9965	9894	9452	8281
7			9999	9996	9984	9877	9453
8					9999	9983	9893
9						9999	9990

Nicht aufgeführte Werte sind bis auf 4 Dezimale 1,0000