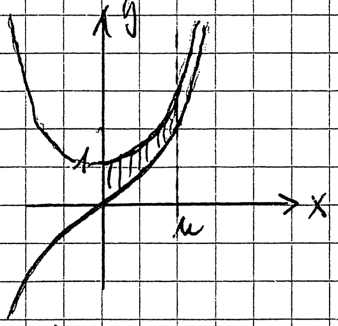
Weiter 1. Aufgabe (Seite 2)

1.4



$$A(u) = \int_0^u \left(c(x) - s(x)\right) dx$$
$$= \left(s(x) - c(x)\right)\Big|_0^u$$
$$= s(u) - c(u) - \left(s(0) - c(0)\right)$$

$\Rightarrow$
$$A(u) = \frac{1}{2}e^{u} - \frac{1}{2}e^{-u} - \frac{1}{2}\cdot\left(e^{u} + e^{-u}\right) - \left(0 - 1\right)$$
$\Rightarrow$
$$A(u) = 1 - e^{-u}$$

1.5

$$\int_0^\infty \left(c(x) - s(x)\right) dx = \lim_{u \to \infty} A(u) = 1 \qquad \text{es existiert}$$

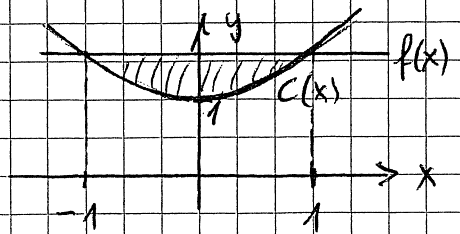
1.6

$$\int \underset{u}{x^2} \cdot \underset{v'}{c(x)}\, dx = x^2 \cdot s(x) - \int 2x \cdot s(x)\, dx$$
$$= x^2 \cdot s(x) - \left[2x \cdot c(x) - \int 2 \cdot c(x)\, dx\right]$$
$$= (x^2 + 2) \cdot s(x) - 2x \cdot c(x) + \text{const}$$

$\Rightarrow$
$$\int_{-1}^{1} x^2 \cdot c(x)\, dx = \Big[(x^2 + 2) \cdot s(x) - 2x \cdot c(x)\Big]_{-1}^{1}$$
$$= 3 \cdot s(1) - 2 \cdot c(1) - \left[3 \cdot s(-1) + 2 \cdot c(-1)\right]$$
$$= 6 \cdot s(1) - 4 \cdot c(1)$$
$$= 3\left(e - \frac{1}{e}\right) - 2\left(e + \frac{1}{e}\right) \quad = e - \frac{5}{e} \quad (\approx 0{,}8788\ldots)$$

1.7

$$c(1) = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) = \frac{e^2 + 1}{2e} = f(1)$$
$$c(-1) = c(1) = f(1) = f(-1)$$



$$A = \int_{-1}^{1} \left(f(x) - c(x)\right) dx = 2 \cdot \frac{e^2 + 1}{2e} - \left(s(1) - s(-1)\right)$$
$$= \left(e + \frac{1}{e}\right) - 2 \cdot s(1) \qquad \text{da } s(-1) = -s(1)$$
$$= e + \frac{1}{e} - e + \frac{1}{e}$$
$$= \frac{2}{e} \quad (\approx 0{,}735\ldots)$$

Lösungsvorschlag 1. Aufgabe – Analysis – Abitur 2005

1.1 $s'(x) = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = c(x)$

$c'(x) = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = s(x)$

$\int s(x)\,dx = c(x) + const \qquad \int c(x)\,dx = s(x) + const$

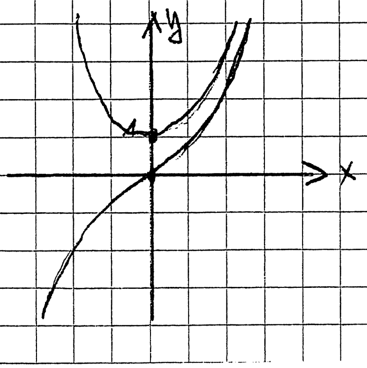
1.2 1.2.1 $d(x) = c(x) - s(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = e^{-x} > 0 \quad \square$

1.2.2 $c(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$ da $e^x, e^{-x} > 0$

1.3

	$s(x)$	$c(x)$
Nullstellen	$s(x) \overset{!}{=} 0 \quad e^x = e^{-x}$ $\Leftrightarrow e^{2x} = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0$	$c(x) > 0$ siehe 1.2.2 keine
Symmetrie	$s(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{-(-x)})$ $= \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$ $= -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -s(x)$ Punktsymmetrie	$c(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)})$ $= \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$ $= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = c(x)$ Achsensymmetrie
Asymptoten	$s(x) \sim \frac{1}{2}e^x \quad x \to \infty$ $s(x) \sim -\frac{1}{2}e^{-x} \quad x \to -\infty$	$c(x) \sim \frac{1}{2}e^x \quad x \to +\infty$ $c(x) \sim \frac{1}{2}e^{-x} \quad x \to -\infty$
Extremstellen	$s'(x) = c(x)$ $c(x) \neq 0$ keine	$c'(x) = s(x)$ $s(x) \overset{!}{=} 0 \quad x_2 = 0$
MIN/MAX	/	$c''(x_2) = c(x_2) = 1 > 0$ MINIMUM: $(0/1)$
Wendepunkte	$s''(x) = s(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $s''(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x_3 = 0$ $s'''(x_3) = c(x_3) \neq 0$ Wendepunkt: $(0/0)$	$c''(x) = c(x) \neq 0$ keine

Skizze:



Weiter 1. Aufgabe (Seite 3)

8 $$\int \underset{u}{\sin x} \cdot \underset{v'}{c(x)}\, dx = \sin x \cdot s(x) - \int \cos x \cdot s(x)\, dx$$
$$= \sin x \cdot s(x) - \left[\cos x \cdot c(x) - \int (-\sin x)\cdot c(x)\, dx\right]$$
$$= \sin x \cdot s(x) - \cos x \cdot c(x) - \int \sin x \cdot c(x)\, dx$$

$\Rightarrow$ $$\int \sin x \cdot c(x)\, dx = \frac{1}{2}\sin x \cdot s(x) - \frac{1}{2}\cos x \cdot c(x) + \text{const}$$

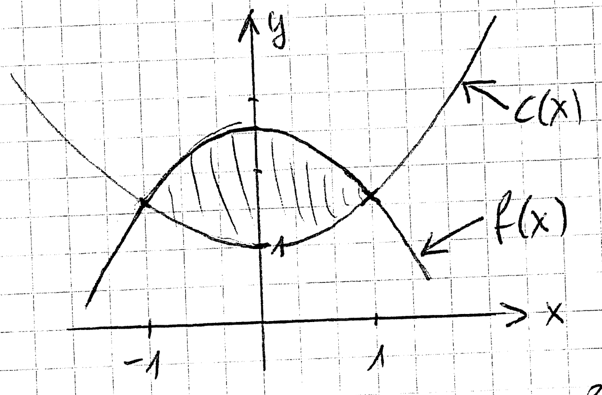
$\Rightarrow$ $$\int_0^{\pi} \sin x \cdot c(x)\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin x \cdot s(x) - \frac{1}{2}\cos x \cdot c(x)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\sin\pi \cdot s(\pi) - \frac{1}{2}\cos\pi \cdot c(\pi) - \left[\frac{1}{2}\sin 0 \cdot s(0) - \frac{1}{2}\cos 0 \cdot c(0)\right]$$
$$= 0 - \frac{1}{2}(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}e^{\pi} + \frac{1}{2}e^{-\pi}\right) - \left[0 - \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1\right]$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{\pi} + e^{-\pi}\right) \qquad (\approx 6{,}2968\ldots.)$$

1.9 $$\left.\begin{aligned} c(1) &= \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) = \frac{e^2+1}{2e} \\ f(1) &= -1 + \frac{(e+1)^2}{2e} = \frac{-2e+e^2+2e+1}{2e} = \frac{e^2+1}{2e} \end{aligned}\right\} f(1) = c(1)$$

Weiterhin ist $f(-1) = c(-1)$ wegen der Achsensymmetrie von f u. c

$$f(1) = f(-1) = c(1) = c(-1) = \frac{e^2+1}{2e} \approx 1{,}54$$

$\Rightarrow$



$$A = \int_{-1}^{1} \left(f(x) - c(x)\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{(e+1)^2}{2e}x - s(x)\right]_{-1}^{1}$$
$$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{(e+1)^2}{2e} - s(1)\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{(e+1)^2}{2e} - s(-1)\right)$$
$$= -\frac{2}{3} + \frac{(e+1)^2}{e} - 2s(1) \qquad \text{da } s(-1) = -s(1)$$
$$= -\frac{2}{3} + e + 2 + \frac{1}{e} - \left(e - \frac{1}{e}\right)$$
$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{e} \qquad (\approx 2{,}069\ldots.)$$

Mathematik – Abitur 2005 ; Europa-Gymnasium Wörth

Lösungsskizze zu Aufgabe 2

2.1 $f_c(x) = \dfrac{x^2+c-4}{x+2}$ bzw. mit Polynom-Div.: $f_c(x) = x - 2 + \dfrac{c}{x+2}$

$\Rightarrow$ schiefe Asymptote : $y = x - 2$ senkrechte Asymptote : $x = -2$

$f_c(0) = \dfrac{c}{2} - 2 \Rightarrow P(0/\dfrac{c}{2}-2)$ auf der y-Achse

$f_c(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4-c}$ mit c>0

- wenn 0<c<4 , dann hat der Graph von f_c zwei verschiedene Schnittpunkte mit der x-Achse, nämlich $N_1\left(-\sqrt{4-c}/0\right)$ *und* $N_2\left(+\sqrt{4-c}/0\right)$.
- wenn c = 4 , dann ex. nur ein Schnittpunkt mit der x-Achse : N(0/0)
- wenn c > 4 , dann ex. kein Schnittpunkt mit der x-Achse.

2.2

$$f_1(x) = \frac{x^2-3}{x+2} = x-2+\frac{1}{x+2} \quad\Rightarrow\quad f_1'(x) = 1-\frac{1}{(x+2)^2} \quad\Rightarrow\quad f_1''(x) = \frac{2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2}{(x+2)^3}$$ $\Rightarrow$ keine WPe.

$$f_1'(x)=0:\quad 1-\frac{1}{(x+2)^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(x+2)^2-1}{(x+2)^2}=0$$

$\Rightarrow$ notw. Bed. : $(x+2)^2-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+4x+4-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+4x+3=0$

$\Leftrightarrow\quad x=-2\pm\sqrt{4-3}=-2\pm1 \quad\Leftrightarrow\quad x=-3$ *oder* $x=-1$

hinr. Krit.: z.B. $f_1''(-3)=-2<0$; $f_1(-3)=-6 \Rightarrow H_1(-3/-6)$

$f_1''(-1)=+2>0$; $f_1(-1)=-2 \Rightarrow T_1(-1/-2)$

2.3 $f_c(x) = \dfrac{x^2+c-4}{x+2} = x-2+\dfrac{c}{x+2} \quad\Rightarrow\quad f_c'(x) = 1-\dfrac{c}{(x+2)^2}$

$\Rightarrow\quad f_c''(x) = \dfrac{2c(x+2)}{(x+2)^4} = \dfrac{2c}{(x+2)^3}$ $\Rightarrow$ keine Wendepunkte möglich

$f_c'(x)=0:\quad 1-\dfrac{c}{(x+2)^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{(x+2)^2-c}{(x+2)^2}=0$ $\Rightarrow$ notw. Bed. :

$(x+2)^2-c=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+2)^2=c \quad\Leftrightarrow\quad x+2=\pm\sqrt{c} \quad\Leftrightarrow\quad x=-2\pm\sqrt{c}$ mit c>0

Hinr. Krit.: z.B.: $f_c''\left(-2-\sqrt{c}\right)=\dfrac{2c}{\left(-2-\sqrt{c}+2\right)^3}=\dfrac{2c}{-c\sqrt{c}}=-\dfrac{2}{\sqrt{c}}<0$ für alle c>0, somit H.P.

$$f_c\left(-2-\sqrt{c}\right)=-2-\sqrt{c}-2+\frac{c}{-2-\sqrt{c}+2}=-4-\sqrt{c}-\sqrt{c}=-4-2\sqrt{c}=2\cdot\left(-2-\sqrt{c}\right)=2\cdot x_H$$

Für alle c>0 hat also der Graph von f_c einen Hochpunkt $H_c(-2-\sqrt{c}/-4-2\sqrt{c})$.

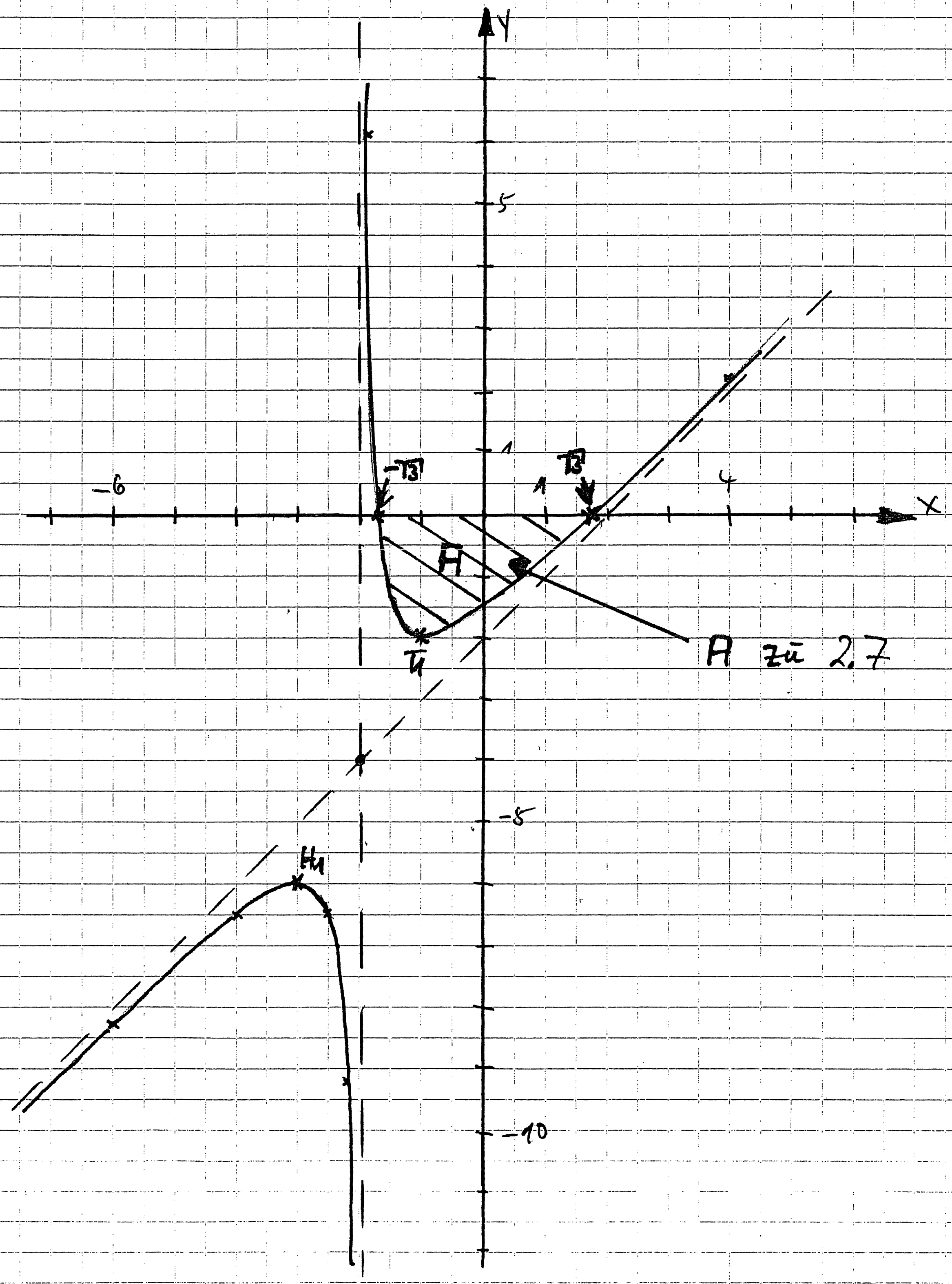
Alle Hochpunkte der Schar f_c liegen auf der Ortslinie mit der Gleichung y = 2x.

$f_c''\left(-2+\sqrt{c}\right)=\dfrac{2c}{\left(-2+\sqrt{c}+2\right)^3}=\dfrac{2c}{c\sqrt{c}}=\dfrac{2}{\sqrt{c}}>0$ für alle c>0, somit T.P.

$$f_c\left(-2+\sqrt{c}\right)=-2+\sqrt{c}-2+\frac{c}{-2+\sqrt{c}+2}=-4+\sqrt{c}+\sqrt{c}=-4+2\sqrt{c}=2\cdot\left(-2+\sqrt{c}\right)=2\cdot x_T$$

Für alle c>0 hat der Graph von f_c einen Tiefpunkt $T_c(-2+\sqrt{c}/-4+2\sqrt{c})$. Ortslinie wie oben.

2.4 Mit $P_1(0/-1{,}5)$; $N_1(-\sqrt{3}/0)$; $N_2(\sqrt{3}/0)$; $H_1(-3/-6)$; $T_1(-1/-2)$
sowie einigen weiteren Graphenpunkten z.B.: (-6/-8,25) ; (-4/-6,5) ; (-2,5/-6,5) ; (-2,2/-9,2) ; (-1,9/6,1) ; (4/2,17) und den beiden Asymptoten ergibt sich :



2.5 $F'(x) = f_1(x)$ für alle $x>-2$ bzw. $F''(x) = f_1'(x)$ für alle $x>-2$

f_1 hat bei $x = -\sqrt{3}$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach – .

Somit hat F bei $x = -\sqrt{3}$ einen Hochpunkt.

f_1 hat bei $x = -1$ eine Maximalstelle. Somit hat F bei $x = -1$ einen Wendepunkt.

f_1 hat bei $x = +\sqrt{3}$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von – nach + .

Somit hat F bei $x = +\sqrt{3}$ einen Tiefpunkt.

2.6 $f_1(x) = F'(x) < 0$ *für* $0 < x < \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ F fällt streng monoton auf $]0;\sqrt{3}[$

$f_1(x) = F'(x) > 0$ *für* $x > \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ F steigt streng monoton auf $]\sqrt{3};+\infty[$

$$F(0) = \int_0^0 f_1(t)dt = 0$$

Ab $x = 0$ fällt also F streng monoton bis zu $x = \sqrt{3}$. Wegen $F(0) = 0$ ist $F(\sqrt{3}) < 0$ also der kleinste Funktionswert von F auf $\mathbb{R}^+$.

Ab $x = \sqrt{3}$ steigt F dann streng monoton für $x \to +\infty$

Wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$ gilt auch $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ (siehe Graph von f_1)

$\Rightarrow$ F hat zwischen $x = \sqrt{3}$ und $x = +\infty$ genau eine Nullstelle.

2.7 $$F(x) = \int_0^x f_1(t)dt = \int_0^x \left(t - 2 + \frac{1}{t+2}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2} - 2t + \ln(t+2)\right]_0^x = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x+2) - \ln 2$$

$\Rightarrow F(-\sqrt{3}) = 1{,}5 + 2\sqrt{3} + \ln(-\sqrt{3}+2) - \ln 2 \approx 2{,}95$

und $F(\sqrt{3}) = 1{,}5 - 2\sqrt{3} + \ln(\sqrt{3}+2) - \ln 2 \approx -1{,}34$

Die Graphik zu 2.4 zeigt, dass

$$A = -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f_1(x)dx = -\left(\int_{-\sqrt{3}}^{0} f_1(x)dx + \int_0^{\sqrt{3}} f_1(x)dx\right) = -\int_{-\sqrt{3}}^{0} f_1(x)dx - \int_0^{\sqrt{3}} f_1(x)dx = \int_0^{-\sqrt{3}} f_1(x)dx - \int_0^{\sqrt{3}} f_1(x)dx$$

$\Leftrightarrow$ $A = F(-\sqrt{3}) - F(\sqrt{3}) \approx 2{,}95 - (-1{,}34) = 4{,}29$

Der Flächeninhalt des umschlossenen Flächenstücks ist ca. 4,29 FE groß.

Mathematik – Abitur 2005 ; Europa-Gymnasium Wörth

Lösungsskizze zu Aufgabe 3

3.1 Alle Schargeraden g_a haben den selben Richtungsvektor, aber unterschiedliche Stützpunkte $\Rightarrow$ echte Parallelität
Alle Geraden der Schar h_a haben den Stützpunkt (4/0/0) gemeinsam.

3.2 Für den Winkel α zwischen h_0 und h_4 gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}8\\-12\\22\end{pmatrix}\right|}{2\cdot\sqrt{64+144+484}} = \frac{44}{2\cdot\sqrt{692}} = \frac{22}{\sqrt{692}} \approx 0{,}8363 \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 33{,}2^\circ$$

Für die Schargerade h_a, die auf h_0 senkrecht steht, muss gelten:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}2a\\-3a\\2+5a\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4+10a=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=-0{,}4$$

Die Gerade $h_{-0,4}$ steht auf h_0 senkrecht.

3.3 $$g_a:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$$

Betrachtet man a als Parameter, so ist dies eine Parameterform der Ebene G mit (0/0/0) als Ebenen-Stützpunkt.

$$\vec{n}^{\,*}_G=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\-2\end{pmatrix} \quad \text{bzw.}\quad \vec{n}_G=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G:\vec{x}\bullet\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad G:3x_1-x_3=0$$

G verläuft parallel zur x_2-Achse und geht durch den Koordinaten-Ursprung.
Somit enthält G die x_2-Achse.

3.4 $$h_a:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2a\\-3a\\2+5a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+\underbrace{s\cdot a\cdot}_{t}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$$

Dies ist eine Parameterform der Ebene H. $\vec{n}^{\,*}_H=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\0\end{pmatrix}$ *bzw.* $\vec{n}_H=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$

Mit (4/0/0) als Stützpunkt $\Rightarrow H:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad H:3x_1+2x_2=12$

3.5

H

$$G\cap H:\left|\begin{matrix} 3x_1+2x_2 & =12\\ 3x_1 \qquad -x_3 & =0\end{matrix}\right| \begin{matrix}\cdot(-1)\\ +\end{matrix} \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{matrix} 3x_1+2x_2 & =12\\ -2x_2-x_3 & =-12\end{matrix}\right|$$

G

Sei $x_3=u\in\mathbb{R} \Rightarrow -2x_2=-12+u \Leftrightarrow x_2=6-\frac{u}{2}$

$$\Rightarrow 3x_1=12-2\left(6-\frac{u}{2}\right)=u \Leftrightarrow x_1=\frac{u}{3}$$

$$s:\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{u}{3}\\6-\frac{u}{2}\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{1}\end{pmatrix} \quad bzw. \quad s:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}+u^*\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}=g_6$$

3.6

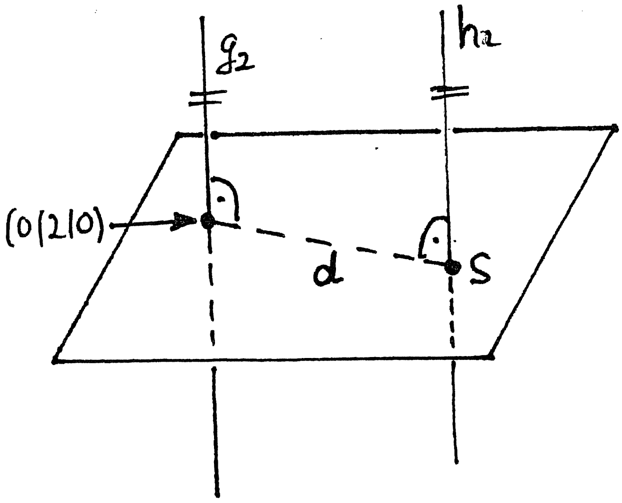
$$g_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix} \quad ; \quad h_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\12\end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren von g_2 und h_2 sind linear abhängig.
Punktprobe mit (4/0/0) in g_2 :

$$\left|\begin{matrix}4=2r\\0=2-3r\\0=6r\end{matrix}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{matrix}r=2\\r=\frac{2}{3}\\r=0\end{matrix}\right| \quad W↯$$

g_2 und h_2 sind also parallel, aber nicht identisch.

3.7 E sei z.B. diejenige Ebene, die senkrecht zu g_2 und h_2 steht, und den Stützpunkt (0/2/0) von g_2 enthält.



$$E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow \quad E: 2x_1-3x_2+6x_3=-6$

Sei $S=h_2\cap E$:

$2(4+4s)-3(-6s)+6(12s)=-6$

$\Leftrightarrow \quad 8+8s+18s+72s=-6 \Leftrightarrow 98s=-14$

$$\Leftrightarrow s=-\frac{14}{98}=-\frac{1}{7} \quad \text{in } h_2 \Rightarrow \vec{s}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{24}{7}\\\frac{6}{7}\\-\frac{12}{7}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(g_2;h_2)=d((0/2/0);S)=\sqrt{\left(\tfrac{24}{7}\right)^2+\left(\tfrac{6}{7}-2\right)^2+\left(\tfrac{12}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{784}}{7}=\frac{28}{7}=4$$

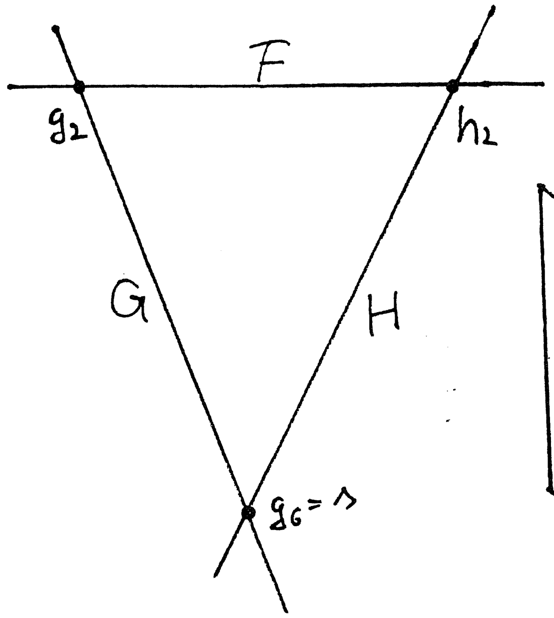
3.8 aus 3.5 folgt: $G \cap H = g_6$

aus 3.3 und 3.6 folgt: $G \cap F = g_2$

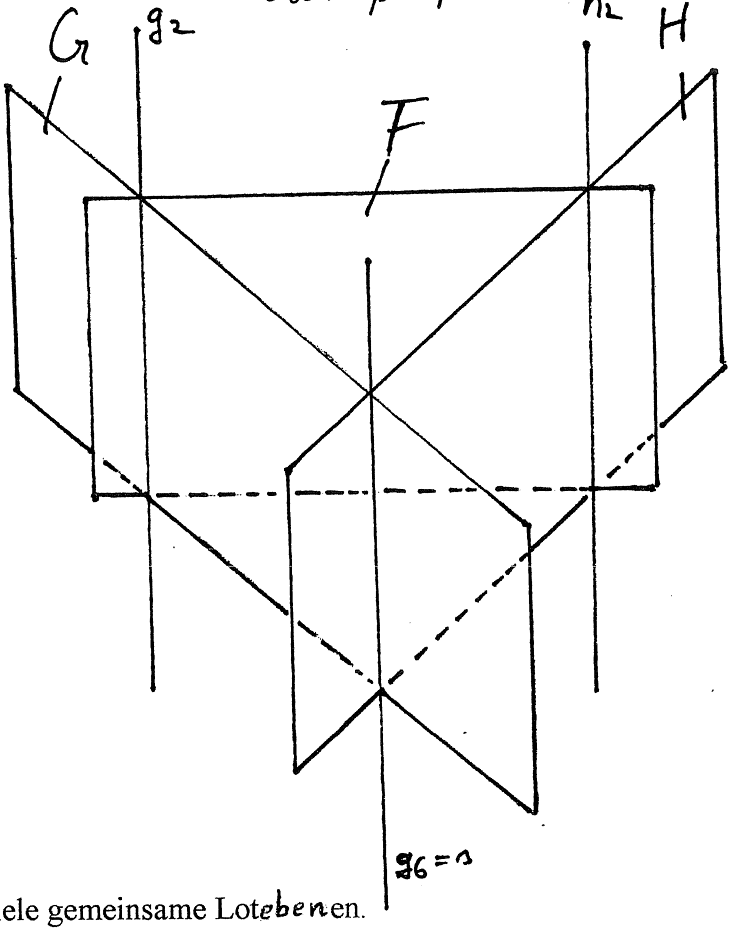
aus 3.4 und 3.6 folgt: $H \cap F = h_2$

außerdem gilt: $\underbrace{g_6 \parallel g_2}_{3.1} \underbrace{\parallel h_2}_{3.6}$

Somit liegen die drei Schnittgeraden von F, G und H alle parallel zueinander.
Die einfachste Lagezeichnung erfolgt also senkrecht zur Richtung dieser drei Geraden:



oder perspektivisch:



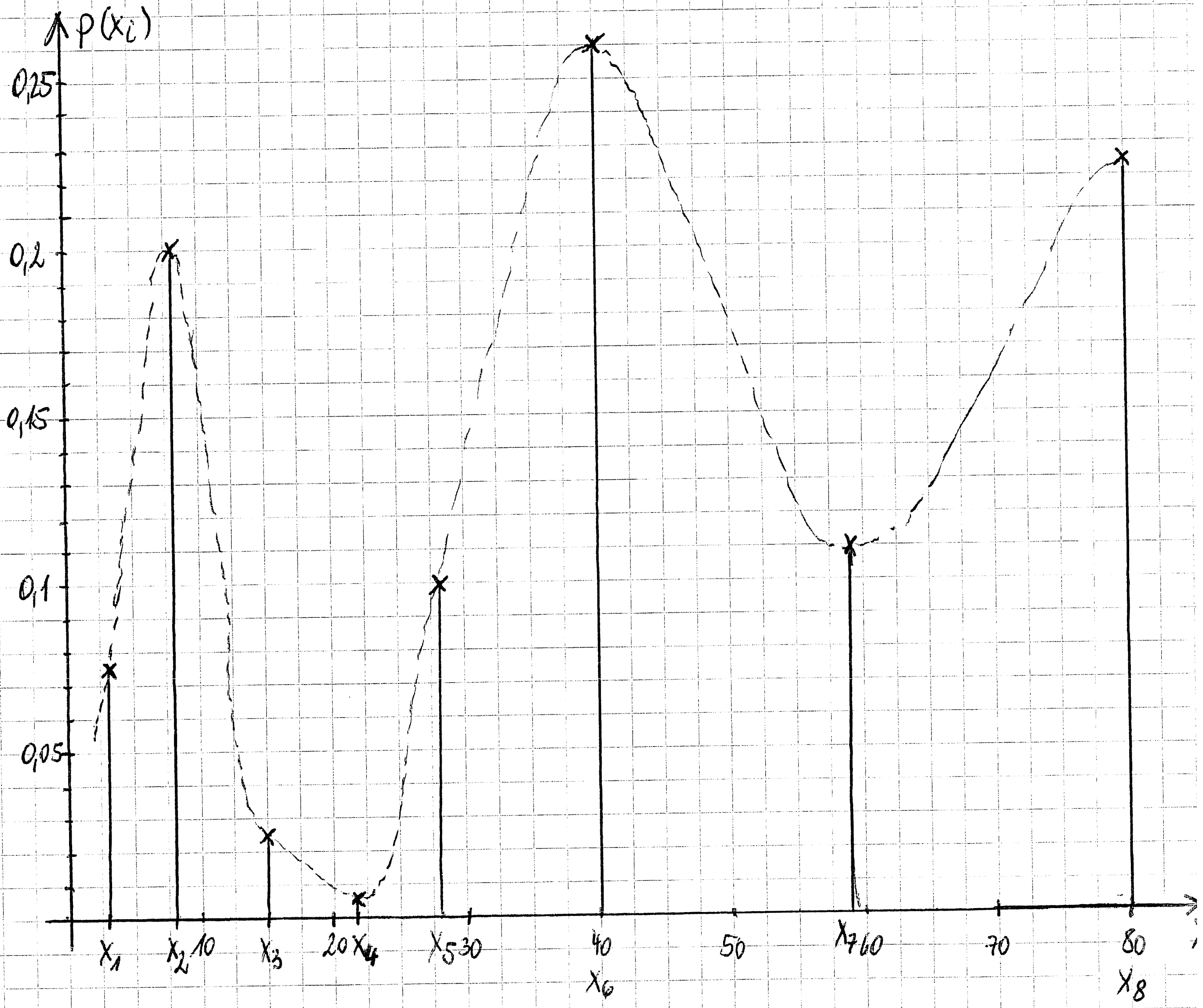
F,G und H haben also unendlich viele gemeinsame Lotebenen.
L hat den Stützpunkt O(0/0/0) und den Normalenvektor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow L: \vec{x} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow L: 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$$

Lösungsvorschlag 4. Aufgabe WT und Statistik 2005

4.1

X	$x_1=3$	$x_2=8$	$x_3=15$	$x_4=22$	$x_5=28$	$x_6=40$	$x_7=59$	$x_8=80$
$p(x_i)$	0,075	0,2	0,025	0,005	0,1	0,26	0,11	0,225



4.2 $E(X) = 3\cdot 0{,}075 + 8\cdot 0{,}2 + 15\cdot 0{,}025 + 22\cdot 0{,}005 + 28\cdot 0{,}1 + 40\cdot 0{,}26 + 59\cdot 0{,}11 + 80\cdot 0{,}225$

$= 40$

$V(X) = 37^2\cdot 0{,}075 + 32^2\cdot 0{,}2 + 25^2\cdot 0{,}025 + 18^2\cdot 0{,}005 + 12^2\cdot 0{,}1 + 0 + 19^2\cdot 0{,}11 + 40^2\cdot 0{,}225$

$= 738{,}83$

$\sigma(X) = 27{,}18 \Rightarrow$ Streuungsintervall $[12{,}82\,;\,67{,}18]$

$E(X) = 40$ Die älteren Jahrgänge sind stärker vertreten (33 – 50 Jahre)

$\sigma(X)$ Breite Streuung um den Erwartungswert
Darin enthalten sind hauptsächlich die älteren Jahrgänge

Weiter 4. Aufgabe (2. Seite)

4.3 4.3.1 $p(A) = 0{,}3 \quad p(B) = 0{,}535 \quad p(A \cap B) = 0{,}075$

4.3.2 $p(A \cap B) = 0{,}075 \neq 0{,}3 \cdot 0{,}535 = p(A) \cdot p(B)$

$\Rightarrow$ A, B abhängig

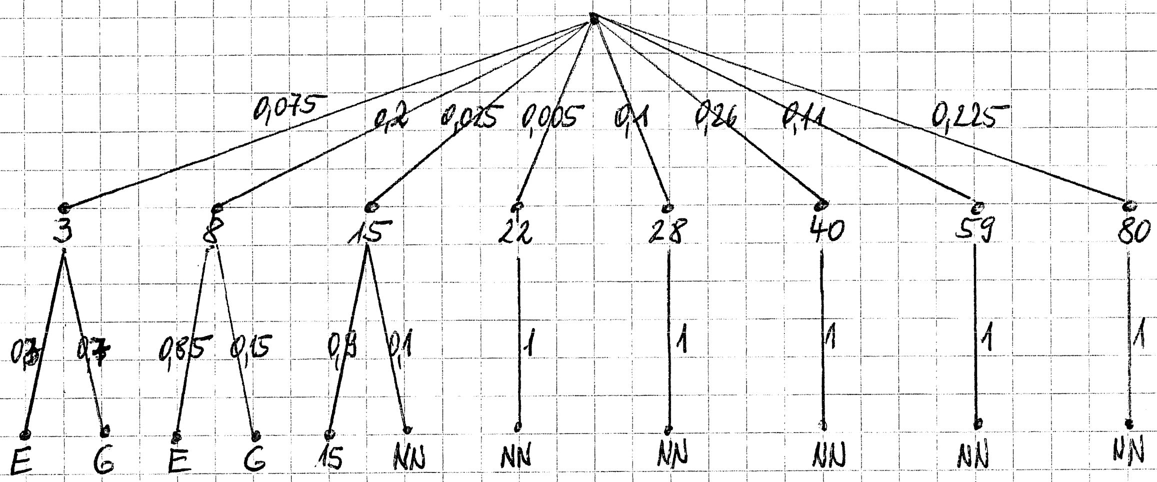
4.3.3

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0{,}075}{0{,}535} = 0{,}140\ldots \quad \neq p(A)$$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0{,}075}{0{,}3} = 0{,}25 \quad \neq p(B)$$

$\Rightarrow$ A, B abhängig

4.4



Die Äste mit Wk 0 wurden weggelassen!

4.4.1 $p(\text{Fall1}) = 0{,}075 \cdot 0{,}7 = 0{,}0525$

4.4.2 $p(\text{Fall2}) = 0{,}2 \cdot 0{,}85 = 0{,}17$

4.4.3 $p(\text{Fall3}) = 0{,}025 \cdot 0{,}9 = 0{,}0225$

4.5 $p(E) = 0{,}075 + 0{,}2 + 0{,}025 = 0{,}3$

$n = 10; \; p = 0{,}3$

4.5.1 $p(X=1) = \binom{10}{1} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 = 0{,}121\ldots$

4.5.2 $p(5 \leq X \leq 7) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^5 + \binom{10}{6} \cdot 0{,}3^6 \cdot 0{,}7^4 + \binom{10}{7} \cdot 0{,}3^7 \cdot 0{,}7^3$

$= 0{,}9984 - 0{,}8497 = 0{,}1487$

4.5.3 $p(\text{nur beim 5. Mal}) = 0{,}3 \cdot 0{,}7^9 = 0{,}0121$

eiter 4. Aufgabe (3. Seite)

6 $n = ?$ $p = 0{,}3$

$p(X \geq 1) \geq 0{,}995 \Rightarrow 1 - p(X=0) \geq 0{,}995$

$\Rightarrow p(X=0) \leq 0{,}005$ oder $\binom{n}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^n \leq 0{,}005$

$\Rightarrow 0{,}7^n \leq 0{,}005 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}005}{\ln 0{,}7}$

$\Rightarrow n \geq 14{,}85\ldots$

Mindestens 15 Personen müssen befragt werden!

4.7 $H_0: p_0 = 0{,}3 \Rightarrow$ bei $n = 300$: $\mu = 300 \cdot 0{,}3 = 90$

$\sigma = \sqrt{300 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 7{,}937\ldots$

Signif. niveau 5% $\Rightarrow$ Faktor $c = 1{,}96$

$[\mu - c\cdot\sigma; \mu + c\cdot\sigma] = [74{,}44; 105{,}56]$
$= [75; 105]$

$79 \in$ Annahmebereich

Die Leitung des Parkes wird am alten Wert für $p(E)$ festhalten.

4.8 $h = \frac{640}{2000} = 0{,}32$

4.8.1 $c = 1{,}96$ (95%-V.); $n = 2000$

$I = \left[h - c\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}; h + c\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right]$

$= \left[0{,}32 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}32\cdot 0{,}68}{2000}}; 0{,}32 + 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}32\cdot 0{,}68}{2000}}\right]$

$= [0{,}2995\ldots; 0{,}340\ldots]$

Da 0,3 noch im Vertrauensintervall liegt, spricht dies für die alte WK.

4.8.2 $n \geq \frac{1{,}96^2}{d^2} \Rightarrow n \geq \frac{1{,}96^2}{0{,}005^2} = 153\,664$

Der Prüfer müsste 153 664 Personen befragen !?

4.9 $E = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}3 = 30$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 4{,}58$

Da $p(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ ist, folgt:

σ-Umgebung: $[20{,}84; 39{,}16] = [21; 39]$