

# Abiturprüfung 2006

## Aufgabe 1

### Analysis



### Mathematik Leistungskurs - Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile, die mit „Nur LK“ ( nicht abgestuftes LF ) oder „Nur GK“ ( abgestuftes LF ) gekennzeichnet sind

---

Gegeben sei die Funktionsschar  $f_c$  mit :

$$f_c(x) = 4 \cdot (x-5)^2 \cdot e^{cx} \quad c > 0 ; x \in \mathbb{R}$$

1.1 Untersuchen Sie diese Funktionsschar auf :

- Nullstellen
- Symmetrie
- Asymptoten
- Extremstellen
- Minima bzw. Maxima

Erstellen Sie zuerst die erste und die zweite Ableitung von  $f_c$  ! Verwenden Sie bei der Erstellung der ersten Ableitung die Produktregel !

1.2 Nur LK - Ermitteln Sie die Kurve, auf der alle Maxima der Funktionen  $f_c$  liegen !

1.3 1.3.1 Geben Sie die beiden Punkte an, die alle Scharkurven gemeinsam haben.

1.3.2 Geben Sie für  $c=2$  ;  $c=\frac{4}{5}$  ;  $c=\frac{2}{5}$  jeweils den Punkt an, für den die zugehörige Scharfunktion  $f_c$  ein Maximum besitzt.

1.3.3 Skizzieren Sie danach für die Indizes  $c=2$  ;  $c=\frac{4}{5}$  ;  $c=\frac{2}{5}$  die jeweiligen Graphen der Scharfunktionen  $f_c$  in einem Koordinatensystem.

Die folgenden Rechnungen werden nur noch für die Scharfunktion  $f_c$  mit dem Index  $c = \frac{2}{5}$  durchgeführt !

Weiterhin sei  $p$  eine Parabel mit der Gleichung :  $y = 4 \cdot (x - 5)^2$

1.4 Ermitteln Sie alle Stammfunktionen von  $f_{\frac{2}{5}}$  .

1.5 **Nur GK** - Bestimmen Sie die Fläche , die der Graph von  $f_{\frac{2}{5}}$  mit der Parabel  $p$  einschließt .

1.6 Für  $u < 0$  schließen der Graph von  $f_{\frac{2}{5}}$  , die negative x-Achse , die y-Achse und die Gerade  $x = u$  eine Fläche  $A(u)$  ein .  
Geben Sie diese Fläche in Abhängigkeit von  $u$  an .

1.7 **Nur LK** - Bestimmen Sie den Wert des uneigentlichen Integrales :

$$\int_{-\infty}^0 f_{\frac{2}{5}}(x) dx$$

1.8 Beantworten Sie folgende Fragen , ohne das gegebene Integral auszurechnen . Dabei sollten Sie natürlich Ihre Ergebnisse aus den vorangegangenen Aufgaben ( insbesondere die aus 1.1 und 1.3.3 ) beachten .

$$G(x) = \int_0^x 4 \cdot (t-5)^2 \cdot e^{\frac{2}{5}t} dt$$

1.8.1 Wieviele Nullstellen besitzt  $G(x)$  ? Geben Sie diese an ?

1.8.2 **Nur GK** - Welches Monotonieverhalten besitzt  $G(x)$  im Bereich  $x > 0$  ?

1.8.3 **Nur LK** - Geben Sie alle Extremstellen und alle Wendestellen von  $G(x)$  für  $x > 0$  an .

# Abiturprüfung 2006

## Aufgabe 2

### Lineare Algebra



### Mathematik Leistungskurs - Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile , die mit „Nur LK“ ( nicht abgestuftes LF ) oder „Nur GK“ ( abgestuftes LF ) gekennzeichnet sind

---

Gegeben sei die Geradenschar  $g_a$  mit :

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} a+5 \\ -4 \cdot a+4 \\ a+6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda, a \in \mathbb{R}$$

2.1 Weisen Sie folgende Eigenschaften dieser Geradenschar nach :

2.1.1 Alle Aufpunkte der Geradenschar liegen auf einer Geraden  $h$  . Geben Sie eine vektorielle Form von  $h$  an .

2.1.2 Die Gerade  $h$  steht senkrecht auf allen Geraden  $g_a$  der Geradenschar .

2.1.3 Alle Geraden der Geradenschar sind parallel zueinander .

2.2 Begründen Sie , unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabe 2.1 , dass alle Geraden der Geradenschar in einer Ebene  $E$  liegen müssen . Weisen Sie nach , dass eine Normalform dieser Ebene  $E$  die folgende Gestalt besitzt :

$$\text{Nf } E: \quad 2 \cdot x + y + 2 \cdot z - 26 = 0$$

2.3 2.3.1 Geben Sie den Abstand des Ursprunges  $O$  von dieser Ebene an .

2.3.2 Ermitteln Sie weiterhin die Schnittpunkte  $S_x$  ,  $S_y$  und  $S_z$  dieser Ebene mit den Koordinatenachsen .

2.3.3 Die Punkte  $S_x$  ,  $S_y$  ,  $S_z$  und  $O$  bilden eine räumliche Pyramide . Fertigen Sie eine Skizze an . Bestimmen Sie das Volumen  $V$  dieser Pyramide !

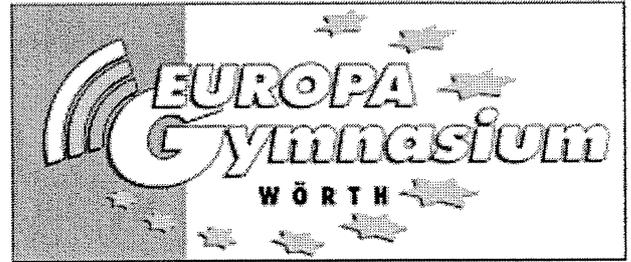
$$(V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h)$$

- 2.4 Ein kleiner , elastischer Gummiball , dessen Durchmesser hier mit Null angenommen wird ( Massenpunkt ) , wird vom Punkte  $A = ( 2 / 2 / 1 )$  ausgehend längs der Geraden  $g_{Ball}$  mit :

$$g_{Ball} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

in Richtung der in Teil 2.2 angegebenen Ebene  $E$  geschossen , an der er ideal elastisch reflektiert wird !

- 2.4.1 Nur GK - Unter welchem Winkel zum Einfallslot trifft der Ball auf die Ebene ?
- 2.4.2 Wie lauten die Koordinaten des Auftreffpunktes  $S$  ?
- 2.4.3 Nur GK - Die Gerade  $g_{Ball}$  schneidet sich auf der Ebene  $E$  mit einer Geraden aus der Schar  $g_a$  . Bestimmen Sie den Index  $a$  dieser Schargeraden .
- 2.4.4 Geben Sie die Gleichung der Ebene  $R$  in Normalform an , in der der gesamte Bewegungsablauf der Reflexion stattfindet .
- 2.4.5 Nur LK - Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden  $g_{refl}$  auf der der Ball nach der Reflexion wieder zurückfliegt .
- 2.5 Ein kugelförmiger Ball mit dem Radius  $r = 3$  fliegt so in Richtung der Ebene  $E$  , dass sich sein Mittelpunkt  $M$  stets auf der Geraden  $g_{Ball}$  bewegt . In welchem Punkt der Geraden  $g_{Ball}$  befindet sich der Mittelpunkt des Balles , wenn der Ball die Ebene  $E$  berührt ? Beachten Sie , dass es zwei Möglichkeiten gibt !
- 2.6 Nur LK - Welcher der beiden möglichen Mittelpunkte liegt auf der gleichen Seite bezüglich der Ebene  $E$  wie der Punkt  $A$  ?



**Mathematik Leistungskurs** - Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile, die mit „**Nur LK**“ ( nicht abgestuftes LF ) oder „**Nur GK**“ ( abgestuftes LF ) gekennzeichnet sind

---

3.1 Die Punkte  $A(3|3|-2)$ ,  $B(5|7|2)$  und  $C(1|9|6)$  bestimmen eine Ebene  $E$ .

3.1.1 Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine Darstellung in Koordinatenform dieser Ebene  $E$  an! (Rechenweg!)

3.1.2 Es existiert mindestens ein Punkt  $Q$ , so dass die Punkte  $A(3|3|-2)$ ,  $B(5|7|2)$ ,  $C(1|9|6)$  und  $Q(q_1|q_2|q_3)$  Eckpunkte eines Trapezes mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) sind:

(1)  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{QC}$ ,

(2) eine der beiden parallelen Seiten ist doppelt so lang wie die andere parallele Seite.

**Nur GK** - Bestimmen Sie mögliche Koordinaten des Punktes  $Q$ .

**Nur LK** - Bestimmen Sie alle möglichen Koordinaten des Punktes  $Q$ .

3.1.3 Zeigen Sie, dass sich die Ebene  $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$  mit der  $x_1x_2$ -Ebene

schneidet.

**Nur LK** - Berechnen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der beiden Ebenen.

3.2 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte  $D(-1|4|3)$ ,  $E(-4|2|1)$  und  $F(6|-2|7)$  eines Dreiecks, die Geradenschar  $g_a$  durch

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, (a \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}), \text{ sowie die Gerade } h \text{ mit } h = (DE) \text{ gegeben.}$$

3.2.1 Zeigen Sie, dass der Punkt  $F(6|-2|7)$  auf keiner der Geraden  $g_a$  liegt.

3.2.2 Für welche Werte von  $a \in \mathbb{R}$  schneiden sich die Geraden  $g_a$  und  $h$  in genau einem Punkt?

3.2.3 Zeigen Sie, dass  $g_2$  und  $h$  zueinander windschief sind.

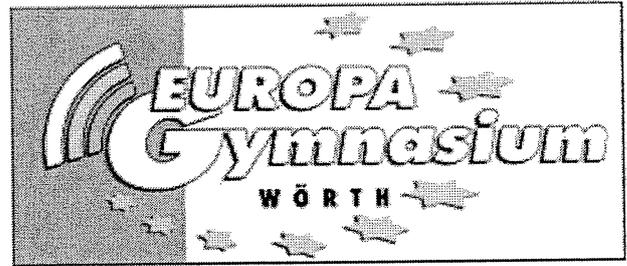
- 3.2.4 **Nur LK** - Durch den Punkt  $P(1|0|4)$ , der auf der Seite  $\overline{EF}$  liegt (kein Nachweis notwendig!) verläuft die zur Dreiecksseite  $\overline{DE}$  parallele Gerade  $l$ . Die Gerade  $l$  teilt das Dreieck  $DEF$  in eine Dreiecksfläche mit dem Flächeninhalt  $A_1$  und eine Trapezfläche mit dem Flächeninhalt  $A_2$ . Bestimmen Sie das Verhältnis  $A_1:A_2$ .

$$(A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h; \quad A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \text{ mit } a \parallel c)$$

- 3.2.5 **Nur GK** - Durch den Punkt  $P(1|0|4)$  verläuft die zur Geraden  $k : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

parallele Gerade  $l$ .

Geben Sie eine Geradengleichung der Geraden  $l$  an und bestimmen Sie den Abstand zwischen den Geraden  $l$  und  $k$ .



**Mathematik Leistungskurs** - Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile, die mit „Nur LK“ ( nicht abgestuftes LF ) oder „Nur GK“ ( abgestuftes LF ) gekennzeichnet sind

---

- 4.1 Eine Produktionsserie von Kinderüberraschungseiern wurde für eine Abiturfeier präpariert. In einem Korb mit 10 Überraschungseiern sind zwei mit Papierkonfetti gefüllt. Äußerlich sind die Überraschungseier nicht zu unterscheiden.  
Ein Abiturient greift dreimal hintereinander in den Korb und holt jeweils (ohne Zurücklegen, unter Beachtung der Reihenfolge) ein Überraschungsei heraus.
- 4.1.1 Bestimmen Sie mittels eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse  
A: “Beide mit Konfetti gefüllten Überraschungseier werden gezogen“ und  
B: “Mindestens ein mit Konfetti gefülltes Überraschungsei wird gezogen“.
- 4.1.2 Alle Überraschungseier liegen wieder im Korb. Es werden nacheinander (Reihenfolge beachten!) fünf Überraschungseier ohne Zurücklegen entnommen.  
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse  
C: “das zweite und das fünfte Überraschungsei sind mit Konfetti gefüllt“ und  
D: “nur ein Überraschungsei ist mit Konfetti gefüllt“.
- 4.2 Im Korb liegen 8 Eier mit Spielzeug und 2 mit Konfetti gefüllte Überraschungseier. Eine Mitschülerin nimmt ein Überraschungsei aus dem Korb, legt es weg und gibt ein zusätzliches Überraschungsei mit Spielzeugfüllung in den Korb. Sie führt dies insgesamt viermal hintereinander aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie nur Überraschungseier mit Spielzeugfüllung aus dem Korb genommen?

4.3 Nach der feuchtfrohlichen Abifete leiden 80 % der Abiturientinnen und Abiturienten an Kopfschmerzen (Ko) und 65 % unter Kreislaufproblemen (Kr). Von Kopfschmerzen oder Kreislaufproblemen, d.h. von mindestens einem "Übel", sind 95 % befallen.

4.3.1 **Nur LK** - Welcher Anteil ist von höchstens einem "Übel" befallen?

Hinweis: Es gilt:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ;  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

4.3.2 Laura behauptet, dass mindestens 85 % unter Kopfschmerzen leiden. Sie befragt 100 Abiturientinnen und Abiturienten.

Wie muss die Entscheidungsregel für die Annahme ihrer Behauptung lauten, wenn sie sich mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % irren will?

4.3.3 In Wirklichkeit ist der Anteil der Abiturientinnen und Abiturienten, die unter Kopfschmerzen leiden, nur 75 %.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit beharrt Laura auf ihrer These (mindestens 85 % leiden unter Kopfschmerzen), obwohl diese jedoch falsch ist? ( Signifikanzniveau von 5%)

4.4 Bei der Herstellung einer Serie von Überraschungseiern hat ein Mitarbeiter der Schokoladenfabrik den Anteil der mit Konfetti gefüllten Überraschungseiern auf 40 % erhöht. Der Abteilungsleiter möchte dies nun überprüfen und durchleuchtet dazu die Überraschungseier (ob ein Überraschungsei untersucht wurde oder nicht, ist nicht zu erkennen!) und legt sie dann wieder zurück. Er entnimmt 50 Überraschungseier nach dem Zufallsprinzip. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Überraschungseier mit Konfetti.

4.4.1 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

4.1.1. 10 Überraschungseier mit Konfetti entnimmt?

4.1.2. mindestens 5 Überraschungseier mit Konfetti entnimmt?

4.1.3. weniger als 20 Überraschungseier mit Konfetti entnimmt?

4.1.4. mindestens 15 und höchstens 25 mit Konfetti entnimmt?

4.4.2 Berechnen Sie den Erwartungswert,

die Varianz und

die Standardabweichung der Zufallsgröße X.

4.4.3 **Nur LK** - Wie viele Eier müsste er mindestens entnehmen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein mit Konfetti gefülltes Überraschungsei dabei hat?

Bestimmen Sie diese Anzahl von Eiern ohne Tabelle!



**Binomialverteilung**  $F_{n;p}(k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$   
 Summenverteilung

n	k	p										n	
		0,02	0,03	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40		0,50
21					9997	8998	6540	2114	0288	0048	0000	0000	78
22					9999	9370	7389	2864	0479	0091	0001	0000	77
23						9621	8109	3711	0755	0164	0003	0000	76
24						9783	8686	4617	1136	0281	0006	0000	75
25						9881	9125	5535	1631	0458	0012	0000	74
26						9938	9442	6417	2244	0715	0024	0000	73
27						9969	9658	7224	2964	1066	0046	0000	72
28						9985	9800	7925	3768	1524	0084	0000	71
29						9993	9888	8505	4623	2093	0148	0000	70
30						9997	9939	8962	5491	2766	0248	0000	69
31						9999	9969	9307	6331	3525	0398	0001	68
32							9985	9554	7107	4344	0615	0002	67
33							9993	9724	7793	5188	0913	0004	66
34							9997	9836	8371	6019	1303	0009	65
35							9999	9906	8839	6803	1795	0018	64
36							9948	9201	7511	2386	0033	0033	63
37							9973	9470	8123	3068	0060	0105	62
38							9986	9660	8630	3822	0105	0105	61
39							9993	9790	9034	4621	0176	0284	60
40							9997	9875	9341	5433	0284	0443	59
41							9999	9928	9566	6225	0443	0843	58
42							9999	9960	9724	6967	0666	1176	57
43							9979	9831	9831	7635	0967	1356	56
44							9989	9900	9900	8211	1356	1841	55
45							9995	9943	9943	8689	1841	2421	54
46							9997	9969	9969	9070	2421	3087	53
47							9999	9999	9999	9362	3087	3822	52
48							9999	9991	9991	9577	3822	4602	51
49							9996	9996	9996	9729	4602	5398	50
50							9998	9832	9832	9832	5398	6178	49
51							9999	9900	9900	9900	6178	6914	48
52							9942	9942	9942	6914	7579	7579	47
53							9968	9968	9968	7579	8159	8159	46
54							9983	9983	9983	8159	8644	8644	45
55							9991	9991	9991	8644	9033	9033	44
56							9996	9996	9996	9033	9334	9334	43
57							9998	9557	9557	9334	9557	9557	42
58							9999	9716	9716	9557	9716	9716	41
59								9824	9824	9716	9824	9824	40
60								9895	9895	9824	9895	9895	39
61								9940	9940	9895	9940	9940	38
62								9967	9967	9940	9967	9967	37
63								9982	9982	9967	9982	9982	36
64								9991	9991	9982	9991	9991	35
65								9996	9996	9991	9996	9996	34
66								9998	9998	9996	9998	9998	33
67								9999	9999	9998	9999	9999	32
68										9999	9999	9999	31
100													100

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000.

0,98	0,97	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50
------	------	------	------	-----	------	------	------	-----	------	------

Signifikanzniveau	c	
	einseitiger Test	zweiseitiger Test
1 %	2,33	2,58
5 %	1,64	1,96