W

Abiturprüfung 2007

Aufgabe 1

Analysis

Mathematik Leistungskurs - Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile , die mit „**Nur LK**“ (nicht abgestuftes LF) oder „**Nur GK**“ (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind

---

Gegeben sei die Funktionsschar f_t mit :

$$f_t(x) = x \cdot e^{-t \cdot x^2} \qquad t > 0 \; ; \; x \in R$$

1.1 Untersuchen Sie diese Funktionsschar auf :

- Nullstellen
- Symmetrie
- Asymptoten
- Extremstellen
- Minima bzw. Maxima (Punkte)
- Wendepunkte

Zeigen Sie unter anderem , dass die 2. Ableitung von f_t die folgende Gestalt besitzt :

$$f_t''(x) = 4 \cdot t^2 \cdot x \cdot (x^2 - \frac{3}{2 \cdot t}) \cdot e^{-t \cdot x^2}$$

1.2 **Nur LK** - Ermitteln Sie die Kurve , auf der alle Maxima und Minima der Funktionen f_t liegen !

<u>Seite 2 von Aufgabe 1</u>

Die weiteren Teile rechnet der Grundkurs **(GK)** nur noch mit : $t = \frac{1}{8}$

1.3 Fertigen Sie eine Skizze des Graphen von f_t an .

Weiterhin sei g eine Gerade mit der Gleichung : $g \ : \ y = e^{-1,5} \cdot x$

1.4 Zeigen Sie , dass die Wendepunkte von f_t ebenfalls auf g liegen , und zeichnen Sie g in Ihre Skizze (vgl. 1.3) ein .

1.5 Ermitteln Sie alle Stammfunktionen von f_t .

1.6 Bestimmen Sie die Fläche , die der Graph von f_t mit der Geraden g einschließt .

1.7 Für u > 0 schließen der Graph von f_t , die positive x-Achse und die Gerade x = u eine Fläche A(u) ein .
Geben Sie diese Fläche in Abhängigkeit von u an .

1.8 **Nur LK** - Bestimmen Sie , sofern dieser existiert , den Wert des uneigentlichen Integrales :

$$\int_0^{\infty} f_t(x)dx$$

1.9 Weisen Sie , **<u>ohne</u>** das gegebene Integral **<u>explizit auszurechnen</u>** , nach , dass die Funktion *G(x)* mit :

$$G(x) = \int_0^x t \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot t^2} dt$$

genau eine Nullstelle besitzt .
Welche Aussagen können Sie , ebenfalls ohne das Integral explizit auszurechnen , über Monotonie und Extremwerte von *G(x)* machen ?

Abiturprüfung 2007

Aufgabe 2

Lineare Algebra

Mathematik Leistungskurs – Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile, die mit „Nur LK“ (nicht abgestuftes LF) oder „Nur GK“ (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind.

Eine Ebenenschar E_t sei gegeben durch

$$E_t : (t-2)x + (t+2)y + z + t - 9 = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

2.1. Können verschiedene Ebenen E_r und E_s

   2.1.1. senkrecht

   2.1.2. parallel zueinander sein?

   Ermitteln Sie gegebenenfalls die Bedingungen für die Parameter r und s.

2.2. Gegeben sei die Gerade g durch $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass g in allen Ebenen der Schar E_t liegt.

2.3. Nur LK: Welchen Abstand hat die Gerade g zum Ursprung?

2.4. Die Ebene E_0 sei eine Tangentialebene an eine Ursprungskugel. Zeigen Sie, dass diese den Radius 3 hat und ermitteln Sie den Berührpunkt.

2.5. Nur LK: Bestimmen Sie die Gleichung der zu E_0 parallelen Tangentialebene P.

2.6. Nur GK: Zeigen Sie, dass der Punkt A(2|2|1) auf der bisher betrachteten Kugel K liegt und bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene T_A in A.

2.7. Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden h der Ebenen E_0 und E mit $E : x + 2y + 2z - 9 = 0$.

2.8. Nur LK: Zeigen Sie, dass $t_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$ und

$t_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$ Tangenten an die Kugel K sind.

Überprüfen Sie die Lagebeziehng der beiden Geraden und berechnen Sie gegebenenfalls den Abstand oder Schnittpunkt und Schnittwinkel.

Abiturprüfung 2007

Aufgabe 3

Lineare Algebra

Mathematik Leistungskurs – Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile, die mit „Nur LK" (nicht abgestuftes LF) oder „Nur GK" (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind.

---

3. Gegeben seien die Punkte $A(0|1|2)$, $B(1|0|2)$ und $C(2|1|2)$.

3.1. Zeigen Sie, dass die Punkte ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck bilden.

3.2. Bestimmen Sie eine Normalenform der Ebene E, in der dieses Dreieck liegt.

3.3. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, der das Dreieck zu einem Quadrat ergänzt.

3.4. Gegeben sei die Kugel K durch ihren Mittelpunkt $M(1|1|2)$ und ihren Radius $r = 1$. Überprüfen Sie, dass

3.4.1. die Punkte D und M in der Ebene E liegen
3.4.2. M der Diagonalenschnittpunkt im vorliegenden Quadrat ist
3.4.3. die Punkte A, B, C und D auf der Kugel K liegen.

3.5. Bestimmen Sie die beiden Punkte F und G, die auf der Kugel liegen und zusammen mit den Punkten A, B, C und D ein Oktaeder bilden.

3.6. Nur LK: Berechnen Sie das Volumen des Oktaeders.

3.7. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Kugel K im Punkt B.

3.8. Nur LK: Die Ebenen E_1 und E_2, gegeben durch

$$E_1: 3x + 4z - 36 = 0 \text{ und } \qquad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad s,t \in \mathrm{IR},$$

sind Tangentialebenen an je eine Kugel der Schar K_r mit $K_r: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2$.

Bestimmen Sie jeweils den Parameter r und den Berührpunkt.

3.9. Nur GK: Die Ebene E_1, gegeben durch $E_1 : 3x + 4z - 36 = 0$ ist Tangentialebene

an eine Kugel der Schar K_r mit $K_r : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = r^2$.

Bestimmen Sie den Parameter r und den Berührpunkt.

3.10. Nur LK: Zeigen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 (aus 3.8) senkrecht aufeinander stehen und berechnen Sie die Schnittgerade.

Abiturprüfung 2007

Aufgabe 4

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Mathematik Leistungskurs - Leistungs und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile , die mit „**Nur LK**" (nicht abgestuftes LF) oder „**Nur GK**" (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind

---

Mitten in einem Waldgebiet hat eine Naturschutzorganisation am Rande einer übersichtlichen Lichtung einen Beobachtungsturm erbaut . Über mehrere Jahre wurden von dort aus die Tiere beobachtet , die über Tag in gewissen Zeiträumen auf dieser Lichtung gesichtet wurden . Zwischen 19 Uhr abends und 5 Uhr morgens erschien nie ein Tier auf der Lichtung . Im restlichen Zeitraum wurde stets mindestens ein Tier gesichtet . Für die Zeit zwischen 5 Uhr morgens und 19 Uhr abends ergab sich am Ende der Testserie die folgende durchschnittliche Chancenverteilung für das Erscheinen eines Tieres auf dieser Lichtung :

Sichtungszeitraum	05 - 07	07 - 09	09 - 11	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19
mittlere Uhrzeit	6	8	10	12	14	16	18
Erscheinungswahrsch.kei	0,04	0,22	0,09	0,13	0,27	0,05	0,2

4.1 Erstellen Sie anhand der vorliegenden Tabelle ein Stabdiagramm für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X - günstig wäre die mittlere Uhrzeit - , und bestimmen Sie danach den Erwartungswert von X . Welche Bedeutung hat der Zahlenwert dieses Erwartungswertes ?

4.2 Gegeben seien die Ereignisse :
A - Ein Tier wurde zwischen 11 Uhr und 15 Uhr gesichtet
B - Ein Tier wurde zwischen 11 Uhr und 13 Uhr oder zwischen 15 Uhr und 19 Uhr gesichtet
C - Ein Tier wurde zwischen 7 Uhr und 9 Uhr , oder 11 Uhr und 13 Uhr , oder 15 Uhr und 17 Uhr gesichtet
D - Ein Tier wurde zwischen 5 Uhr und 9 Uhr gesichtet

4.2.1 Ermitteln Sie $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(D)$ und $p(A \cap B)$.
4.2.2 Sind die Ereignisse A und B unabhängig ? Begründung !
4.2.3 **Nur GK** - Bestimmen Sie $p(C \setminus D)$ und $p(A \cup B)$.
4.2.4 **Nur LK** - Bestimmen Sie $p_B(A)$ und $p_C(B)$.

Seite 2 von Aufgabe 4 :

4.3 Als Nebenergebnis hatte die Gruppe noch erhalten :

- Die Wahrscheinlichkeit , dass man an einem Tag einen Fasan oder ein Rebhuhn sichtet (Ereignis E) , ergab sich zu : $p(E) = 0{,}305$. Die Wahrscheinlichkeit , dass man an einem Tag einen Fuchs sichtet (Ereignis F) pendelte sich auf $p(F) = 0{,}16$ ein .
- Wurde jedoch an einem Tag ein Fasan oder ein Rebhuhn gesehen , so war die Wahrscheinlichkeit für die Sichtung eines Fuches gegenüber der normalen Wahrscheinlichkeit doppelt so groß .

Legen Sie einen zweistufigen Baum für diese Ereignisse E (1. Stufe) und F an .

4.3.1 Geben Sie anhand Ihres Baumes die folgenden Wahrscheinlichkeiten an : $p(E)$, $p_E(F)$

4.3.2 **Nur GK** : Ermitteln Sie $p_{\overline{E}}(\overline{F})$, $p(\overline{E} \cap F)$

4.3.3 **Nur LK** : Ermitteln Sie mit Hilfe Ihres Baumes und entsprechender Regeln : $p(F), p_F(E)$

In den restlichen Aufgaben wird nur noch der Sichtungszeitraum zwischen 11 Uhr und 15 Uhr relevant sein . Das Ereignis G bezeichnet dabei die Sichtung eines Tieres in diesem Zeitraum :

Zeigen Sie , dass gilt : $\mathbf{p(G)} = \frac{2}{5}$

4.4 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit , dass sich das Ereignis G innerhalb einer 10 Tage lang währenden Beobachtungszeit :

4.4.1 an genau einem Tag

4.4.2 an höchstens sechs Tagen , aber an mindestens drei Tagen

4.4.3 nur am fünften Tag

einstellt .

4.5 **Nur LK** - Wie viele Tage müsste man beobachten , damit sich das Ereignis G mit <u>mindestens</u> 99,4% <u>mindestens einmal</u> einstellt ?

4.6 Eine Jugendgruppe macht es sich 200 Tage lang zur Aufgabe , die Angaben der Naturschutzorganisation bezüglich des Ereignisses G zu überprüfen . Sie stellen bei ihrer Überprüfung fest , dass sich das Ereignis G in diesen 200 Tagen genau 65 mal eingestellt hatte .
Ermitteln Sie den Annahmebereich für ein Signifikanzniveau von 5% für dieses Ergebnis. Welche Schlussfolgerung wird die Jugendgruppe aus ihrem Ergebnis ziehen ?

Seite 3 von Aufgabe 4 :

4.7 Aufgeschreckt durch das Ergebnis der Jugendgruppe , führt ein von der Organisation beauftragter Mönch aus einem in der Nähe liegenden Kloster noch einmal eine Überprüfung durch . Zur Erhöhung der Genauigkeit sitzt der Mönch an 2000 Tagen (ca. 5 ½ Jahre) während des besagten Zeitraumes auf dem Beobachtungsturm , um nachzuprüfen , ob Tiere auf die Lichtung kommen oder nicht . Er stellt fest , dass in dieser Zeit das Ereignis G genau 760 mal eingetreten ist .

4.7.1 Ermitteln Sie daraus das 95% - Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit von G .
Spricht dieses Zählergebnis Ihrer Meinung nach für die anfänglich von der Leitung der Naturschutzorganisation für G ermittelten Wahrscheinlichkeit ? Begründung !

4.7.2 **Nur GK** - Wie viele Tage müsste der Mönch beobachten , damit das 95% - Vertrauensintervall höchstens die Länge 0,025 hat ?

Tafelwerk und Hilfsangaben

Für die beurteilende Statistik sei folgende Tabelle gegeben :

Wahrscheinlichkeit	Radius des Intervalles
0,80	1,28σ
0,90	1,64σ
0,95	1,96σ
0,975	2,33σ
0,99	2,58σ

Das 95%-Vertrauensintervall einer beobachteten relativen Häufigkeit h ist für hinreichend große Werte von n näherungsweise :

$$\left[h-1{,}96\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}};h+1{,}96\sqrt{\frac{h\cdot(1-h)}{n}}\right]$$

Binomialverteilung (Summenverteilung) : $F_{n,p}(k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot p^{i}\cdot(1-p)^{n-i}$

k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
0	0,5987	3487	1074	0563	0282	0060	0010
1	9139	7361	3758	2440	1493	0464	0107
2	9885	9298	6778	5256	3828	1673	0547
3	9990	9872	8791	7759	6496	3823	1719
4	9999	9984	9672	9219	8497	6331	3770
5		9999	9936	9803	9527	8338	6230
6			9991	9965	9894	9452	8281
7			9999	9996	9984	9877	9453
8					9999	9983	9893
9						9999	9990

hier für n=10

nicht aufgeführte Werte sind bis auf 4 Dezimale 1,0000