Abiturprüfung 2007

Aufgabe 1

Analysis

Mathematik Leistungskurs – Leistungs- und Grundkursanforderungen

Die Aufgabenteile sind von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten mit Ausnahme der Teile, die mit „Nur LK“ (nicht abgestuftes LF) oder „Nur GK“ (abgestuftes LF) gekennzeichnet sind.

---

1. $f(x) = x \cdot e^{-tx^2}$

$f_t'''(x) = (-6t + 24t^2x^2 - 8t^3x^4)e^{-tx^2}$

1.1. $f'(x) = (1 - 2tx^2) \cdot e^{-tx^2}$ 2

$f_t''(x) = e^{-tx^2} \cdot (-6tx + 4t^2x^3)$ 2

- Nullstelle $x_1 = 0$
- Punktsymmetrie
- Asymptoten $y = 0$ für $x \to \pm\infty$

3

- Extremstellen $f_t'(x) = 0 \to x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{2t}}$ 1

$f_t''(\sqrt{\frac{1}{2t}}) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2t}}(-4t)$ $f_t''(\sqrt{\frac{1}{2t}}) < 0$ Maximumstelle 1

$f_t''(-\sqrt{\frac{1}{2t}}) = e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2t}}(4t)$ $f_t''(-\sqrt{\frac{1}{2t}}) > 0$ Minimumstelle 1

- Minimum$\left(-\sqrt{\frac{1}{2t}} \mid -\sqrt{\frac{1}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ Maximum$\left(\sqrt{\frac{1}{2t}} \mid \sqrt{\frac{1}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 1/1

5

- Wendepunkte:

$f_t''(x) = 0$ $e^{-tx^2} \cdot (-6tx + 4t^2x^3) = 0$ $x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2t}}$ 1/1

4

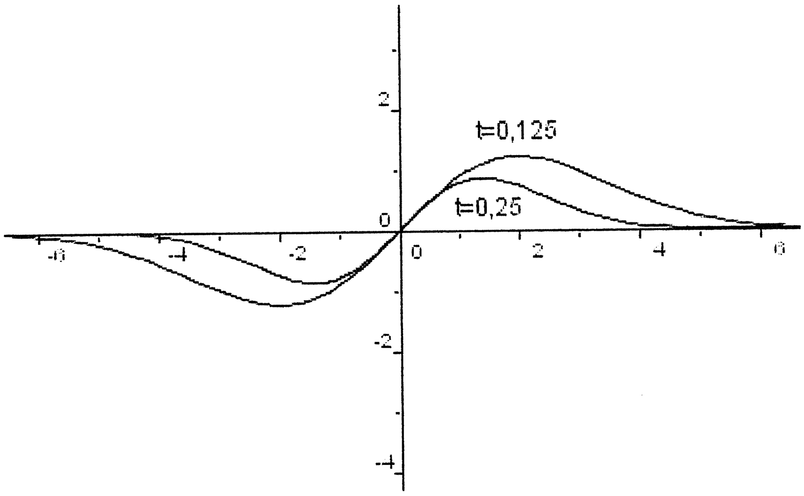
$W_1(-\sqrt{\frac{3}{2t}} \mid -\sqrt{\frac{3}{2t}} \cdot e^{-\frac{3}{2}})$ $W_2(0 \mid 0)$ $W_3(\sqrt{\frac{3}{2t}} \mid \sqrt{\frac{3}{2t}} \cdot e^{-\frac{3}{2}})$

2

$t = 0{,}125$ $W_3(3{,}46 \mid 0{,}77)$

1.2. $h : y = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot x$ 3 LK

1.3.



3

1.4. $g\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2t}}\right)=\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2t}}\right)\cdot e^{-1,5}$ $\quad g(0)=0$ 2

1.5. $\int f_t(x)dx=-\frac{1}{2t}e^{-tx^2}+c$ 3

1.6. Schnittstellenvon g und f_t: $x=0$ und $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2t}}$ 1

$\int(f-g)dx = 2\left|-\frac{1}{2t}e^{-tx^2}-\frac{e^{-1,5}}{2}x^2\right|_0^{\sqrt{\frac{3}{2t}}} = 2\left(-\frac{1}{2t}e^{-t\cdot\frac{3}{2t}}-\frac{e^{-1,5}}{2}\frac{3}{2t}-\left(-\frac{1}{2t}e^0\right)\right)$ 2

$= 2\left(-\frac{1}{2t}e^{-1,5}-e^{-1,5}\frac{3}{4t}+\frac{1}{2t}\right) = -\frac{1}{t}e^{-1,5}-e^{-1,5}\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{t}$ 1

$=\frac{1}{t}\left(-e^{-1,5}-e^{-1,5}\frac{3}{2}+1\right) = \frac{1}{t}\left(-2,5\cdot e^{-1,5}+1\right)=\frac{0,442}{t}$ 1

5

1.7. $\int_0^u f_t(x)dx=-\frac{1}{2t}e^{-tx^2}\Big|_0^u=-\frac{1}{2t}e^{-tu^2}+\frac{1}{2t}=A(u)$ 2

1.8. $\int_0^\infty f_t(x)dx=\lim\limits_{u\to\infty}A(u)=\frac{1}{2t}$ 2 LK

1.9. $x>0$: $\quad t\cdot e^{-\frac{1}{8}t^2}>0$ für $t>0 \quad G(x)>0$ für $x>0$

$x<0$: $\quad t\cdot e^{-\frac{1}{8}t^2}<0$ für $t<0 \quad G(x)<0$ für $x<0$ 2

$G(0)=0$

Monotonie:

$G'(x)=x\cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}>0$ für $x>0$ 3

$G'(x)=x\cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}<0$ für $x<0$

Extremwerte von g sind die Nullstellen von $f_t(x)$.

5

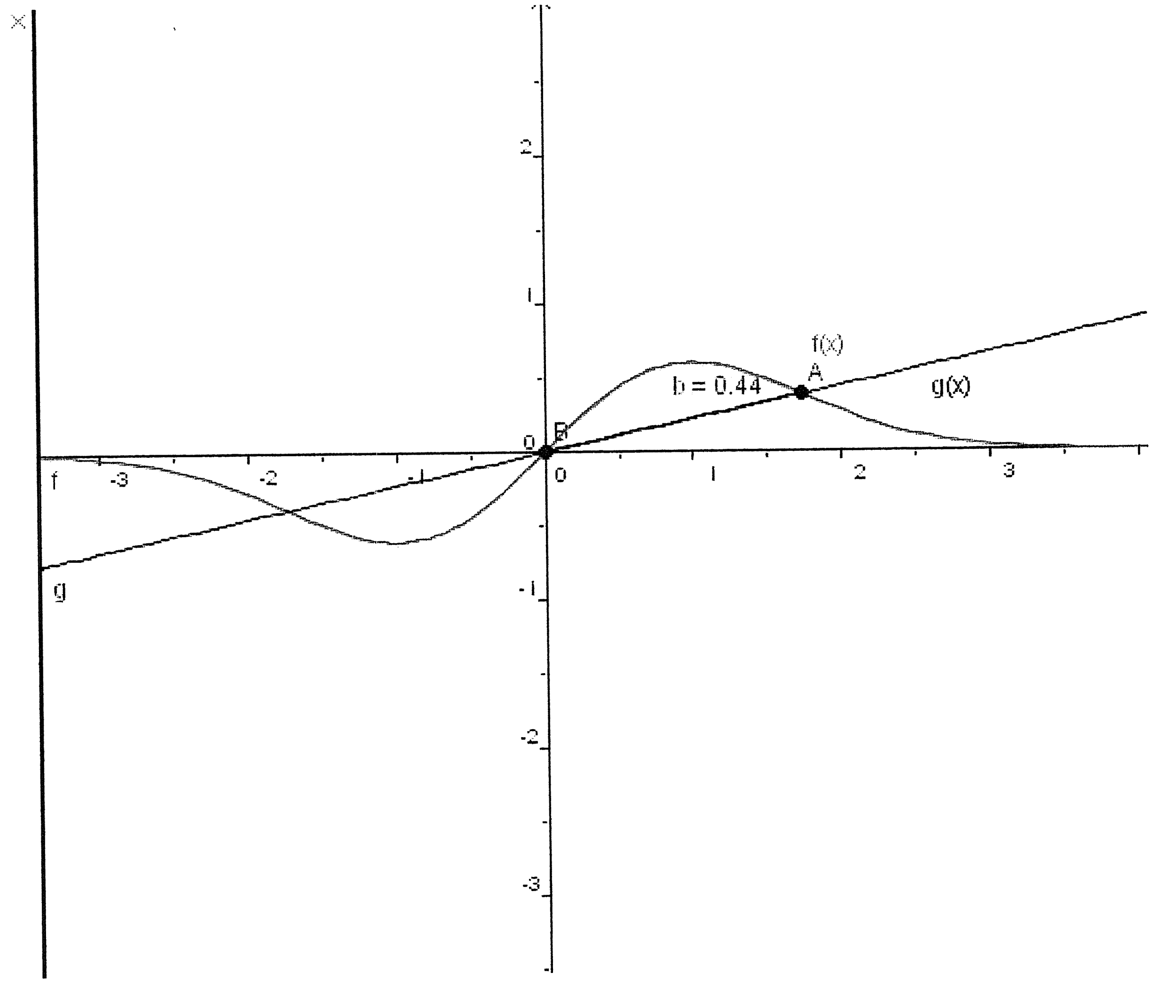
Freie Objekte

- **a = 2.72**
- **g(x) = x 0.22**
- **k = 0.5**

Abhängige Objekte

- **A = (1.73, 0.39)**
- **B = (0, 0)**
- **b = 0.44**
- $f(x) = x \exp(-0.5\, x^2)$

Hilfsobjekte



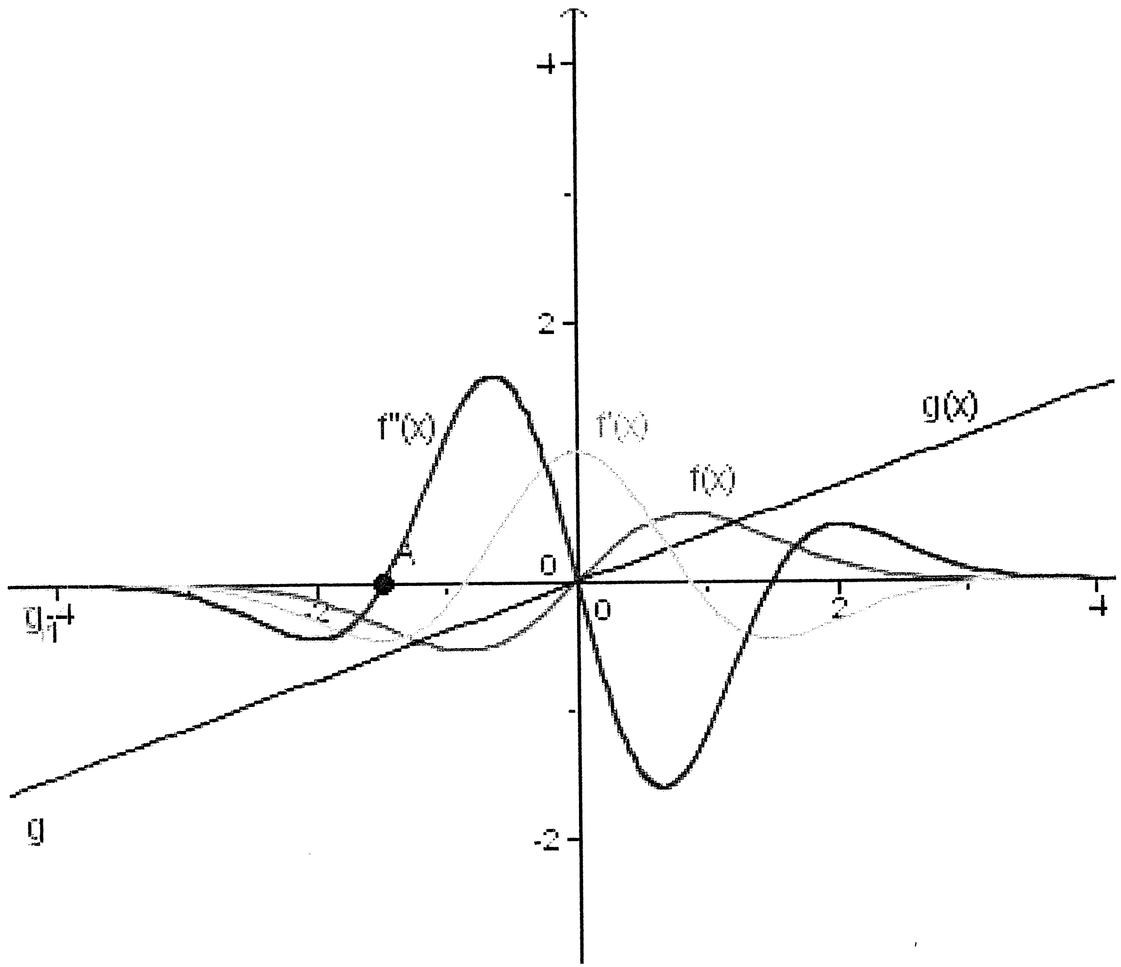
Freie Objekte

- $a = 2.72$
- $g(x) = x\ 0.37$
- $k = 0.67$

Abhängige Objekte

- $A = (-1.5, 0)$
- $f(x) = x \exp(-0.67\ x^2)$
- $f_1(x) = (1 - 2 * 0.67\ x^2) / \exp(0.67\ x^2)$
- $g_1(x) = -(6 * 0.67\ x - 4 * 0.67^2\ x^3) / \exp(0.67\ x^2)$

Hilfsobjekte



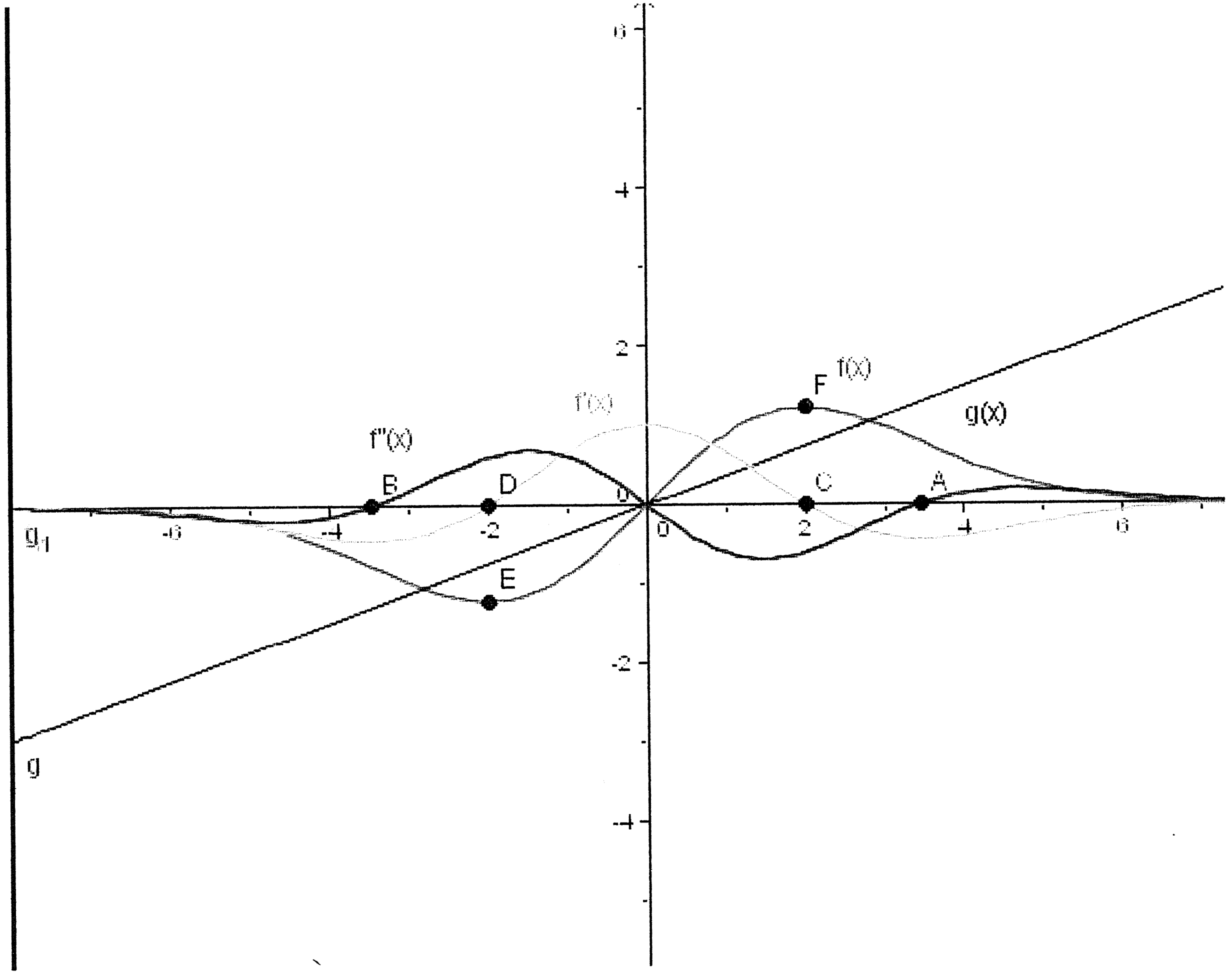
Freie Objekte

- $a = 2.72$
- $g(x) = x\ 0.37$
- $k = 0.12$

Abhängige Objekte

- $A = (3.46, 0)$
- $B = (-3.46, 0)$
- $C = (2, 0)$
- $D = (-2, 0)$
- $E = (-2, -1.21)$
- $F = (2, 1.21)$
- $b: x = -2$
- $c: x = 2$
- $f(x) = x \exp(-0.12\ x^2)$
- $f_1(x) = (1 - 2 * 0.12\ x^2) / \exp(0.12\ x^2)$
- $g_1(x) = -(6 * 0.12\ x - 4 * 0.12^2\ x^3) / \exp(0.12\ x^2)$

Hilfsobjekte



Abiturprüfung 2007

Aufgabe 2

Lineare Algebra

Mathematik Leistungskurs – Leistungs- und Grundkursanforderungen

Lösungen zu Aufgabe 2

2. Eine Ebenenschar E_t sei gegeben durch

$$E_t:(t-2)x+(t+2)y+z+t-9=0,\quad t\in IR$$

2.1.1. Ebenen senkrecht $\Leftrightarrow$ Normalenvektoren senkrecht

$$\begin{pmatrix} r-2 \\ r+2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} s-2 \\ s+2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2rs+9=0$$

Die Bedingung für die Parameterwerte ist $rs=-4{,}5$. 2

2.1.2. Ebenen parallel $\Leftrightarrow$ Normalenvektoren kollinear

$$k\cdot\begin{pmatrix} r-2 \\ r+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-2 \\ s+2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k=1 \text{ (dritte Gleichng)} \qquad \Rightarrow \qquad r=s$$ 1

Verschiedene Ebenen der Schar E_t können nicht parallel sein.

2.2. g in E_t: $(t-2)(-3-r)+(t+2)(2+r)+(-1-4r)+t-9=0$ wahr? 2

$-3t-rt+6+2r+2t+rt+4+2r-1-4r+t-9=0$ erfüllt!

2.3. Schneide zunächst g mit $E:-x+y-4z=0$ 1 $\quad -(-3-r)+(2+r)-4(-r-4r)=0$ 1

$3+r+2+r+4+16r=0 \quad 18r+9=0 \quad r=-0{,}5 \quad P(-2{,}5\,|\,1{,}5\,|\,1)$ 1 4

$d=\sqrt{\frac{38}{4}}=\sqrt{\frac{19}{2}}=3{,}08$ oder einsetzen in die normierte Plückerform 1

$$d=\frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{\left|\begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{49+121+1}}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{171}}{\sqrt{18}}=\sqrt{\frac{19}{2}}=3{,}08$$

2.4. E_0: $-2x+2y+z-9=0$, suche $d(E_0, O)$

HNF: $-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-3=0$ 1 $\quad d(E_0, O)=|3|=3$ 1 Kugelradius $r=3$ 2

$$g':\vec{x}=r\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad r\in IR \qquad \text{in } E_0 \quad -2(-2r)+2(2r)+r-9=0 \quad 9r=9$$ 2 $\quad r=1$ 3 5

$B(-2\,|\,2\,|\,1)$ 1

2.5. $r = -1$ und $B_p(2|-2|-1)$ $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ 1

$P: -2x + 2y + z + 9 = 0$ 1

2

2.6. Punktprobe $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^2 = 9$ erfüllt $T_A: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ 1

$T_A: 2x + 2y + z - 9 = 0$ 2

3

2.7. Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ Aufpunkt der Schnittgeraden h 2

Setze $x = 0$ $\left|\begin{array}{ccccc} 2y & + & z & = & 9 \\ 2y & + & 2z & = & 9 \end{array}\right|$ $z = 0$ $y = 4{,}5$ $S(0|4{,}5|0)$ 1

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ 1

4

2.8. $A(1|2|2) \in K$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ $t_1 \perp \overrightarrow{OA}$ Tangente 2

$A'(-2|1|2) \in K$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ $t_2 \perp \overrightarrow{OA'}$ Tangente 2

$\overrightarrow{u_1} * \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ t_1 und t_2 schneiden sich senkrecht. 1

Gleichungssystem zur Schnittpunktbestimmung

$\left|\begin{array}{cccccccc} 1 & + & 2r & = & -2 & + & s \\ 2 & - & r & = & 1 & + & 2s \\ 2 & & & = & 2 & & \end{array}\right|$ $r = -1$, $s = 1$ $S(-1|3|2)$ 2

7

Eine Ebenenschar E_t sei gegeben durch

$$E_t:(t-2)x+(t+2)y+z+t-9=0, \quad t\in \mathbb{R}$$

2.1. Können verschiedene Ebenen E_r und E_s
- senkrecht
- parallel zueinander sein?

Ermitteln Sie gegebenenfalls die Bedingungen für die Parameter r und s.

2.1.1. Ebenen senkrecht ⇔ Normalenvektoren senkrecht

$$\begin{pmatrix} r-2 \\ r+2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} s-2 \\ s+2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad ✓ \qquad \Leftrightarrow \qquad 2rs+9=0$$

Die Bedingung für die Parameterwerte ist $rs=-4{,}5$.✓

2.1.2. Ebenen parallel ⇔ Normalenvektoren kollinear

$$k\cdot\begin{pmatrix} r-2 \\ r+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-2 \\ s+2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k=1 \text{ (dritte Gleichng)} \qquad \Rightarrow \qquad r=s$$

Verschiedene Ebenen der Schar E_t können nicht parallel sein. ✓ ③

2.2. Gegeben sei die Gerade g durch $g:\vec{x}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad r\in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass g in allen Ebenen der Schar E_t liegt.

g in E_t: $\quad (t-2)(-3-r)+(t+2)(2+r)+(-1-4r)+t-9=0$ wahr?✓

$-3t-rt+6+2r+2t+rt+4+2r-1-4r+t-9=0$ erfüllt!✓ ②

2.3. Nur LK: Welchen Abstand hat die Gerade g zum Ursprung?

Schneide zunächst g mit $E:-x+y-4z=0$✓ $\qquad -(-3-r)+(2+r)-4(-r-4r)=0$

$3+r+2+r+4+16r=0 \qquad 18r+9=0 \qquad r=-0{,}5$✓ $\qquad P(-2{,}5\,|\,1{,}5\,|\,1)$ ✓

$d=\sqrt{\frac{38}{4}}=\sqrt{\frac{19}{2}}=3{,}08$✓ ④ oder einsetzen in die normierte Plückerform

$$d=\frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{\left|\begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{49+121+1}}{\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{171}}{\sqrt{18}}=\sqrt{\frac{19}{2}}=3{,}08 \quad ④$$

2.4. Die Ebene E_0 sei eine Tangentialebene an eine Ursprungskugel. Zeigen Sie, dass diese den Radius 3 hat und ermitteln Sie den Berührpunkt.

E_0: $-2x+2y+z-9=0$,✓ suche $d(E_0, O)$

HNF: $-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-3=0$✓ $\qquad d(E_0, O)=|3|=3 \qquad$ Kugelradius $r=3$✓

$g':\vec{x}=r\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r\in \mathbb{R} \qquad$ in $E_0 \quad -2(-2r)+2(2r)+r-9=0 \qquad 9r=9 \quad r=1$✓

$B(-2\,|\,2\,|\,1)$✓ ⑤

2.5.

2.6. Nur LK: Bestimmen Sie die Gleichung der zu E_0 parallelen Tangentialebene P.

$$r=-1 \quad \text{und} \quad B_p(2|-2|-1)\checkmark \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=0$$

$$P:-2x+2y+z+9=0\checkmark ②$$

2.7. Nur GK: Zeigen Sie, dass der Punkt A(2|2|1) auf der bisher betrachteten Kugel K liegt und bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene T_A in A.

$$\text{Punktprobe}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}^2=9\,\text{erfüllt}\checkmark \qquad T_A:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=0 \qquad \checkmark$$

$$T_A:2x+2y+z-9=0\checkmark ③$$

2.8. Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden h der Ebenen E_0 und E mit $E:x+2y+2z-9=0$.

$$\text{Richtungsvektor} \quad \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}\checkmark\checkmark \qquad \text{Aufpunkt der Schnittgeraden h}$$

$$\text{Setze } x=0 \quad \begin{vmatrix}2y&+&z&=&9\\2y&+&2z&=&9\end{vmatrix} \quad z=0 \quad y=4{,}5 \qquad S(0|4{,}5|0)\checkmark$$

$$h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4{,}5\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}\checkmark ④$$

2.9. Nur LK: Zeigen Sie, dass $t_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\ r\in\mathbb{R}$ und

$t_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ s\in\mathbb{R}$ Tangenten an die Kugel K sind.

Überprüfen Sie die Lagebeziehng der beiden Geraden und berechnen Sie gegebenenfalls den Abstand oder Schnittpunkt und Schnittwinkel.

$$A(1|2|2)\in K \text{ und } \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=0 \qquad t_1\perp\overrightarrow{OA} \qquad \text{Tangente}\checkmark\checkmark$$

$$A'(-2|1|2)\in K \text{ und } \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=0 \qquad t_2\perp\overrightarrow{OA'} \qquad \text{Tangente}\checkmark\checkmark$$

$$\vec{u_1} * \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$ t_1 und t_2 schneiden sich senkrecht. ✓

Gleichungssystem zur Schnittpunktbestimmung

$$\left| \begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2r & = & -2 & + & s \\ 2 & - & r & = & 1 & + & 2s \\ 2 & & & = & 2 & & \end{array} \right|$$

$r = -1, \quad s = 1$ ✓ $\qquad S(-1|3|2)$ ✓ ⑦

2.1

2.1.1 $E_r \perp E_s$

$$\Rightarrow \quad n_r \circ n_s = \begin{pmatrix} r-2 \\ r+2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} s-2 \\ s+2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad rs - 2r - 2s + 4 + rs + 2r + 2s + 4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2rs + 9 = 0 \qquad (r, s \neq 0)$$

$$\Rightarrow \quad r = -\frac{9}{2s} \qquad s \neq 0 \qquad \text{Ja}$$

2.1.2 $E_r \parallel E_s$

$$\Rightarrow \quad n_r = \lambda \cdot n_s$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} r-2 \\ r+2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} s-2 \\ s+2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow r = s \\ \longrightarrow r = s \\ \rightarrow \lambda = 1 \end{matrix} \qquad \text{Nein}$$

2.2

g eingesetzt in E_t:

$$(t-2)\cdot(-3-r) + (t+2)\cdot(2+r) + (-1-4r) + t - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -3t - rt + 6 + 2r + 2t + rt + 4 + 2r - 1 - 4r + t - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -3t + 2t + t - rt + rt + 6 + 4 - 1 - 9 + 2r + 2r - 4r = 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad g \subset E_t$$

2.3

$O \in E_g$ und $g \in E_g$ (E-Neun)

Nach 2.1.1 ist $E_{-\frac{1}{2}} \perp E_g$

$\Rightarrow$ da $n_{-\frac{1}{2}} \perp g$ und $n_{-\frac{1}{2}} \parallel E_g$ $\quad n_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Ursprungsgerade die g schneidet

außerdem ist $h \perp g$

$$h \cap g: \quad \begin{array}{cc} \lambda & r \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -5 & +1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 3 \mid \cdot 2 \\ \cdot 5 \\ \cdot 5 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & +1 \\ 0 & 22 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \longrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \\ \longrightarrow \checkmark \\ \longrightarrow r = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \{S\} = h \cap g: \quad S = (-5/2 \mid 3/2 \mid 1)$$

$$\Rightarrow \quad d(g, O) = \|\overrightarrow{OS}\| = \frac{1}{2}\sqrt{38}$$

---

oder normales Verfahren: $E_\perp$ (zu g): $x - y + 4z = 0$

2.4 Nf E_0 : $-2x+2y+z-9=0$ $\quad n_0 = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\|n_0\|=3$

HNf E_0 : $-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-3=0$

$\Rightarrow \underline{\underline{r_0 = d(E_0, O) = -3}}$ ✓

$h \perp E_0$; $O \in h$:

$h: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\{B\} = h \cap E_0$: h in E_0 : $-2(2\lambda)+2(-2\lambda)-\lambda-9=0$

$\Rightarrow \lambda = -1$

$\underline{\underline{B = (-2/2/1)}}$

2.5 B^* Gegenpunkt zu B

$OB^* = -\overrightarrow{OB}$: $B^* = (2|-2|-1)$

$n_P = \overrightarrow{OB^*} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad$ ($n_P = n_0$ geht auch)

Nf P : $2x-2y-1x-9=0$ $\quad$ Zweite Tangentialebene

2.6

K : $\|\vec{x}\|=3$ $\quad$ A in K : $\left\|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\|=3$ ✓

T_A : $n_A = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

Nf T_A : $2x+2y+z-9=0$

2.7 $g = E \cap E_0$

$\vec{u}_g = n_E \times n_{E_0} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\6\end{pmatrix}$

$x=0$ ergibt: $\left.\begin{array}{l}2y+2z=9\\2y+z=9\end{array}\right\}-$ $\quad z=0 \Rightarrow y=\frac{9}{2}$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\9/2\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\5\\-6\end{pmatrix}$

2.8 $t_1 \cap \mathbb{K}$:

$$\left\|\begin{pmatrix}1+2r\\2-r\\2\end{pmatrix}\right\|^2 = 9 \Rightarrow 1+4r+4r^2+4-4r+r^2+4 = 9$$

$$\Rightarrow 5r^2 = 0$$

$$\Rightarrow r = 0$$

$\Rightarrow$ Aufpunkt von t_1 (A_1) ist einziger Durchstoßpunkt

$\Rightarrow$ A_1 ist Berührpunkt $\Rightarrow$ t_1 ist Tangente

$t_2 \cap \mathbb{K}$

$$\left\|\begin{pmatrix}-2+s\\1+2s\\2\end{pmatrix}\right\|^2 = 9 \Rightarrow s = 0$$

$\Rightarrow$ A_2 ist Berührpunkt $\Rightarrow$ t_2 ist Tangente

Lagebeziehung zw. t_1 und t_2:

$$\begin{array}{cc} r & s \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 1 \\ |2 \\ \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \longrightarrow r = -1 \\ \rightarrow s = 1 \\ \end{array}$$

$\Rightarrow \{S\} = t_1 \cap t_2 : \quad S = (-1|+3|2)$

Schnittwinkel α:

$$\alpha = \sphericalangle(t_1, t_2) = \sphericalangle(\vec{u}_{t_1}, \vec{u}_{t_2})$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}{\| \text{"} \| \cdot \| \text{"} \|} = \frac{0}{5} = 0$$

$\Rightarrow t_1 \perp t_2$

Abiturprüfung 2007

Aufgabe 3

Lineare Algebra

Mathematik Leistungskurs – Leistungs- und Grundkursanforderungen

3. Lösungen zu Aufgabe 3

3.1. $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}$ $\quad\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=0$

3.2. $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ $\quad$ wähle $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $A\in E$ $\quad\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0$ $\quad z-2=0$

3.3. $D(1|2|2)$. Dann $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DA}|=\sqrt{2}$ $\quad\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=0$

3.4. Kugel K

3.4.1. D: $2-2=0$ $\quad$ M: $2-2=0$

3.4.2. $\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\overrightarrow{OM}$

3.4.3. $\left[\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2=1$ $\quad\left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2=1$ $\quad\left[\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2=1$

$\left[\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2=1$

3.5. $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ schneide g und K $\quad K:\left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2=1$

$s=\pm1$ $\quad$ $F(1|1|3)$ und $G(1|1|1)$

3.6. $V=2\cdot\frac{G\cdot h}{3}=2\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{3}=1{,}\overline{3}$

3.7. $[\vec{x}-\vec{m}]*[\vec{b}-\vec{m}]=r^2$ $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]*\left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]=1$ $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=1$ $y=0$

$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

3.8. Bestimme d(M, E_1) über die HNF. $d=\dfrac{|3\cdot1+0\cdot1+4\cdot2-36|}{\sqrt{25}}=\dfrac{25}{5}=5$ $r=5$

$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ in E_1 $3+9s+8+16s-36=0$ $s=1$ $B_1(4|1|6)$

E_2 in NF $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\-6\end{pmatrix}$ wähle $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}9\\1\\-4\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}=0$

$E_2:4x-3z-48=0$ $d(M,E_2)=\dfrac{|4\cdot1+0\cdot1-3\cdot2-48|}{\sqrt{25}}=\dfrac{50}{5}=10$ $r=10$

$4(1+4s)-3(2-3s)-48=0$ $s=2$ $B_2(9|1|-4)$ oder $|\overrightarrow{MB_2}|=\left|\begin{pmatrix}8\\0\\-6\end{pmatrix}\right|=10$

3.9. Wie 3.8.

3.10. $E_1:3x+4z-36=0$ $E_2:4x-3z-48=0$

$\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}=0$ $E_1\perp E_2$ $\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-25\\0\end{pmatrix}$ wähle $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ als Richtungsvektor

Gleichungssystem zum Auffinden eines Aufpunktes $\left|\begin{matrix}3x&+&4z&-&36&=&0\\4x&-&3z&-&48&=&0\end{matrix}\right|$

$x=12$ $y=z=0$ $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha\in\mathbb{R}$ ist eine

Parametrdarstellung der Schnittgerade

3. Gegeben seien die Punkte A(0|1|2), B(1|0|2) und C(2|1|2).

3.1. Zeigen Sie, dass die Punkte ein gleichseitiges rechtwinkliges Dreieck bilden.

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\checkmark \quad |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2} \qquad \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=0\checkmark$$ ②

3.2. Bestimmen Sie eine Normalenform der Ebene E, in der dieses Dreieck liegt.

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \quad \text{wähle } \vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ A\in E \qquad \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0 \quad z-2=0\checkmark$$ ①

3.3. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, der das Dreieck zu einem Quadrat ergänzt.

$$D(1|2|2).\checkmark \text{ Dann } \overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DA}|=\sqrt{2} \qquad \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=0$$ ①

3.4. Gegeben sei die Kugel K durch ihren Mittelpunkt M(1|1|2) und ihren Radius r = 1. Überprüfen Sie, dass

3.4.1. die Punkte D und M in der Ebene E liegen

3.4.2. M der Diagonalenschnittpunkt im vorliegenden Quadrat ist

3.4.3. die Punkte A, B, C und D auf der Kugel K liegen.

D: 2 – 2 =0   M: 2 – 2 =0✓

$$\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\overrightarrow{OM}\checkmark \quad \left[\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2=1 \quad \left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2=1$$

$$\left[\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2=1 \qquad \left[\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2=1\checkmark$$ ③

3.5. Bestimmen Sie die beiden Punkte F und G, die auf der Kugel liegen und zusammen mit den Punkten A, B, C und D ein Oktaeder bilden.

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \checkmark \text{ schneide g und K} \quad K:\left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]^2=1\checkmark$$

$s=\pm 1$ F(1|1|3) und G(1|1|1) ✓✓ ④

3.6. Berechnen Sie das Volumen des Oktaeders.

$$V=2\cdot\frac{G\cdot h}{3}=2\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{3}=1{,}\bar{3}\checkmark\checkmark$$ ②

3.7. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Kugel K im Punkt B.

$$[\vec{x}-\vec{m}]*[\vec{b}-\vec{m}]=r^2 \quad \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]*\left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]=1\checkmark \qquad \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right]*\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=1$$

$$y=0\checkmark \qquad \vec{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$ ②

3.8. und 3.9 Die Ebenen E_1 und E_2 gegeben durch $E_1: 3x + 4z - 36 = 0$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $s, t \in IR$ sind Tangentialebenen an je eine Kugel der Schar K_r mit $K_r: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2$. Bestimmen Sie jeweils den Parameter r und den Berührpunkt.

Bestimme $d(M, E_1)$ über die HNF. $d = \frac{|3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 36|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$ $r = 5$✓ ✓

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ in E_1 $3 + 9s + 8 + 16s - 36 = 0$ $s = 1$ $B_1(4|1|6)$ ✓ ✓

E_2 in NF $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ ✓ wähle $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right] * \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

$E_2: 4x - 3z - 48 = 0$ ✓ $d(M, E_2) = \frac{|4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 48|}{\sqrt{25}} = \frac{50}{5} = 10$ $r = 10$✓ ✓

$4(1 + 4s) - 3(2 - 3s) - 48 = 0$ $s = 2$ $B_2(9|1|-4)$ oder

$|\overrightarrow{MB_2}| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = 10$ ✓ ✓ ⑩

3.10. Zeigen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 (aus 3.8) senkrecht aufeinander stehen und berechnen Sie die Schnittgerade.

$E_1: 3x + 4z - 36 = 0$ $E_2: 4x - 3z - 48 = 0$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ ✓ $E_1 \perp E_2$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix}$ wähle $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓ als Richtungsvektor

Gleichungssystem zum Auffinden eines Aufpunktes $\left|\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 4z & - & 36 & = & 0 \\ 4x & - & 3z & - & 48 & = & 0 \end{array}\right|$

✓ $x = 12$ $y = z = 0$✓ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha \in IR$ ist eine Parametrdarstellung der Schnittgerade✓ ⑤

3.1 $\vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{AB} \circ \vec{BC} = 0$

weiterhin ist: $\|\vec{AB}\| = \|\vec{BC}\| = \sqrt{2}$

3.2 $n_E^* = \vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow n_E = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

NF E: $\underline{\underline{z - 2 = 0}}$

3.3 $\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OC} + \vec{BA} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

$\underline{\underline{D = (1/2/2)}}$

3.4 $D \in E$ nach Konstruktion

$M \in E$: einsetzen (3. Koord. ist 2)

3.4.2. $S_{Diag.}$: $\vec{OS_D} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

$= \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow M = S_D$

3.4.3

$K: \|\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\| = 1$

$A: \|\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\| = 1$ ✓ $B: \|\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\| = 1$ ✓

$C: \|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\| = 1$ ✓ $D: \|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\| = 1$ ✓

3.5 $M \in h$; $h \perp E$ od. $\vec{u}_h \parallel n_E$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$h \cap K = \{F, G\}$ für $\lambda = \pm 1$ $\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\| = 1$

$F = (1,1,3)$; $G = (1,1,1)$

3.6 $V_{Okt} = 2 \cdot V_{Pyr.} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$= \frac{2}{3}(\sqrt{2})^2 \cdot 1 = \frac{4}{3}$

3.7 $\quad n^*_{T_B} = \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad n_{T_B} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Nf T_B : $y = 0$

3.8

Nf E_1 : $3x + 4z - 36 = 0 \qquad n_1 = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \; \|n_1\| = 5$

HNf E_1 : $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z - \frac{36}{5} = 0$

$n_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \qquad \|n_2 = 5$

HNf E_2: $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}z - \frac{48}{5} = 0$

$d(E_1, (1,1,2)) = \frac{3}{5} + \frac{8}{5} - \frac{36}{5} = -\frac{25}{5} = -5$

$d(E_2, (1,1,2)) = \frac{4}{5} - \frac{6}{5} - \frac{48}{5} = -\frac{50}{5} = -10$

$\Rightarrow$

E_1 berührt K_5 : $\left\| \vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\|^2 = 25$ in B_1

E_2 berührt K_{10} : $\left\| \vec{x} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\|^2 = 100$ in B_2

B_1 : h_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ in K_5 eingesetzt

$\left\| \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} \right\| = 5 \Rightarrow |\lambda| = 1$

$\lambda = 1$: $B_1 = (4|1|6) \in E_1$

$\lambda = -1$: $B_1 = (-2|1|-2) \notin E_1$

B_2 : h_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$ in K_{10} eingesetzt

$\left\| \mu \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \right\| = 10 \Rightarrow |\mu| = 2$

$\mu = 2$: $B_2 = (9|1|-4) \in E_2$

$\mu = -2$: $B_2 = (-7|1|8) \notin E_2$

3.9 $\quad n_1 \circ n_2 = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E_1 \perp E_2$

$\vec{u}_g^{\,*} = n_1 \times n_2 = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\25\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_g = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\{S\} \in E_1 \cap E_2$:

$Nf\ E_1: \quad 3x + 4z - 36 = 0 \quad |\cdot 4$

$Nf\ E_2: \quad 4x - 3z - 48 = 0 \quad |\cdot 3$ +

$24x - 288 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 12$

$\Rightarrow \quad y = 0$ festgelegt

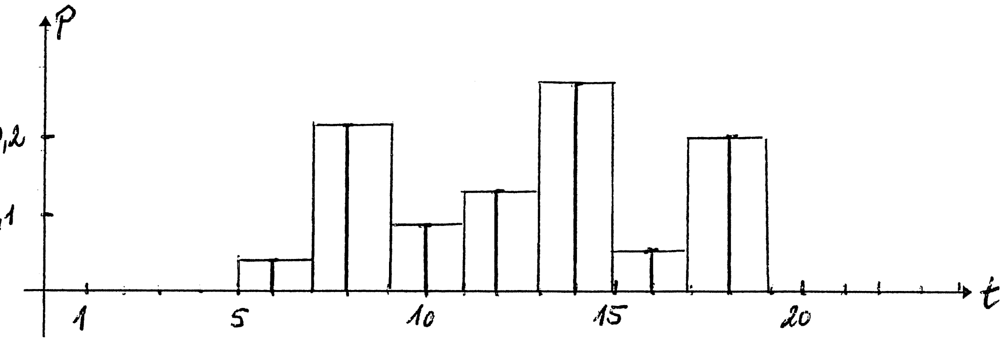
$z = 0$ Ergebnis

$S = (12/0/0)$ z.B.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g = E_1 \cap E_2$$

Lösungen zu Aufgabe 4

4.1



2

$E(X) = 6*0{,}04 + 8*0{,}22 + 10*0{,}09 + 12*0{,}13 + 14*0{,}27 + 16*0{,}05 + 18*0{,}2$ 2 } 5
$= 12{,}64$

Die Wahrscheinlichkeit , ein Tier anzutreffen , ist zwischen 11 Uhr und 13 Uhr (oder 14 Uhr) am größten . 1

0,5 0,5 0,5 0,4 0,5 1

4.2 4.2.1 $p(A) = 0{,}4$ $p(B) = 0{,}38$ $p(C) = 0{,}6$ $p(D) = 0{,}26$ $p(A \cap B) = 0{,}13$ 3

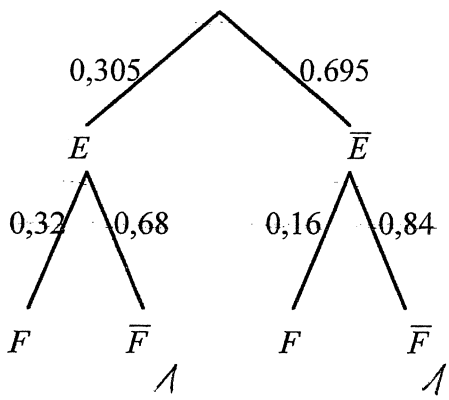
4.2.2 $p(A \cap B) = 0{,}13 \neq 0{,}4*0{,}38 = p(A)*p(B)$ ⇒ A , B sind abhängig 2

4.2.3 $p(C \setminus D) = 0{,}18$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}65$ GK 1|1 } 11

4.2.4 $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0{,}13}{0{,}38} = 0{,}342$ LK 2

$p_C(B) = \dfrac{p(B \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}6} = 0{,}3$ $\dfrac{0{,}18}{0{,}4} = 0{,}45$ 2

4.3



2 } 9

4.3.1 $p(E) = 0{,}305$ $p_E(F) = 0{,}32$ 2

4.3.2 $p_{\overline{E}}(\overline{F}) = 0{,}84$ $p(\overline{E} \cap F) = 0{,}695 * 0{,}16 = 0{,}1112$ GK 2

4.3.3 $p(F) = p(E \cap F) + p(\overline{E} \cap F) = p(E) * p_E(F) + p(\overline{E}) * p_{\overline{E}}(F) = 0{,}2088$ LK 3

$p_F(E) = \dfrac{p(E \cap F)}{p(F)} = 0{,}467..$

Seite 2 der Lösungen von Aufgabe 4

p(G) = 0,13 + 0,27 = 0,4 = 2/5 1

4.4 4.4.1 $p(X=1) = \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^9 = 0{,}0404$ 1 6

4.4.2 $p(3 \leq X \leq 6)$ = F(10 ; 0,4 ; 6) - F(10 ; 0,4 ; 2) = 0,9452 - 0,1673 = 0,7779 2

4.4.3 p(nur 5. Tag) = $0{,}4 \cdot (0{,}6)^9$ = 0,0040 2

4.5 $p(X \geq 1) \geq 0{,}994$ $\Leftrightarrow$ $1 - p(X=0) \geq 0{,}994$ 1

$\Leftrightarrow$ $p(X=0) \leq 0{,}006$ 1

$\Leftrightarrow$ $\binom{10}{0} \cdot (0{,}4)^0 \cdot (0{,}6)^n \leq 0{,}006$ 1 5

$\Leftrightarrow$ $n \geq \frac{\ln(0{,}006)}{\ln(0{,}6)}$ LK 1

$\Leftrightarrow$ $n \geq 10{,}015..$ 1

Länger als 10 Tage (mindestens 11 Tage)

4.6 H_0 : p = 0,4 1 n = 200 μ = n*p = 80 1

k = 65 $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 6{,}928$

c = 1,96 5

Annahmebereich : [μ - c*σ ; μ + c*σ] = [66,4.. ; 93,57..] 1

65 ∉ [67 ; 93] 1

Die Jugendgruppe wird die Vorgaben der Naturschutzorganisation als fehlerhaft bezeichnen ! 1

4.7 4.7.1 n = 2000 h = 760/2000 = 0,38 1

Vertrauensintervall : $\left[h - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \; ; \; h + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$ 2 4

= [0,358... ; 0,401..]

p = 0,4 liegt noch im Vertrauensintervall ; d.h. die N-Org. beruhigt sich ! 1

4.7.2 d = 0,025 $\Rightarrow$ $n \geq \frac{1{,}96^2}{d^2} = 6146{,}56$ 6K 2

Man müsste 6147 Tage lang beobachten !