Lösungen der Aufgaben

1 gerade Funktionen: a); e); i); l); n); p) 139
ungerade Funktionen: c); g); h); m); o)
weder gerade noch ungerade Funktion: b); d); f); j); k)

2 a) Wir setzen voraus, dass im Funktionsterm der ganzrationalen Funktion f nur gerade Exponenten auftreten, also

$$f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt
$$\begin{aligned} f(-x) &= a_0 + a_2(-x)^2 + a_4(-x)^4 + \cdots + a_{2n}(-x)^{2n} \\ &= a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} = f(x), \end{aligned}$$

f ist also eine gerade Funktion.

Nun setzen wir voraus, dass die ganzrationale Funktion f zu $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ eine gerade Funktion ist, dass also für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = f(x)$. Dann gilt

$$0 = f(x) - f(-x) = 2a_1x + 2a_3x^3 + 2a_5x^5 + \cdots + 2a_kx^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei k der höchste ungerade Exponent von f ist. Daraus folgt, dass alle Koeffizienten mit ungeradem Index gleich Null sind: $a_1 = a_3 = \cdots = a_k = 0$. Also sind im Funktionsterm von f nur gerade Exponenten.

b) Die entsprechende Aussage für ungerade ganzrationale Funktionen lautet: „Eine ganzrationale Funktion ist genau dann ungerade, wenn sie nur ungerade Exponenten enthält."

Wir setzen voraus, dass im Funktionsterm der ganzrationalen Funktion f nur ungerade Exponenten auftreten, also

$$f(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann gilt
$$\begin{aligned} f(-x) &= a_1(-x) + a_3(-x)^3 + a_5(-x)^5 + \cdots + a_{2n+1}(-x)^{2n+1} \\ &= -(a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1}) = -f(x), \end{aligned}$$

f ist also eine ungerade Funktion.

Nun setzen wir voraus, dass die ganzrationale Funktion f zu $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ eine ungerade Funktion ist, dass also für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = -f(x)$. Dann gilt

$$0 = f(x) + f(-x) = 2a_0 + 2a_2x^2 + 2a_4x^4 + \cdots + 2a_kx^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei k der höchste gerade Exponent von f ist. Daraus folgt, dass alle Koeffizienten mit geradem Index gleich Null sind: $a_0 = a_2 \cdots = a_k = 0$. Also sind im Funktionsterm von f nur ungerade Exponenten.

Falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$.

Wahr; $f(-x) = -f(x) \wedge 0 \in D(f) \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.
e ungerade Funktion hat die Nullstelle $x_N = 0$.

Wahr, da jede ganzrationale Funktion f zu $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ stetig ist
l weil wegen $f(x) = a_nx^n(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1)$ für ungerades n gilt:

für $a_n > 0$ ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$,

für $a_n < 0$ ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$.

Wahr; Beispiel: $f(x) = x(x-1)^2$

Falsch; s. c)

Falsch; Gegenbeispiel: $f(x) = -x^4$

ı) Da die Funktionsterme von geraden ganzrationale Funktionen nur Potenzen mit
raden Exponenten enthalten, beinhaltet der Funktionsterm einer Summe von gera-
n ganzrationalen Funktionen ebenfalls nur Potenzen mit geraden Exponenten.
enso gilt: Da die Funktionsterme von ungeraden ganzrationale Funktionen nur Po-
nzen mit ungeraden Exponenten enthalten, beinhaltet der Funktionsterm einer Sum-
e von ungeraden ganzrationalen Funktionen ebenfalls nur Potenzen mit ungeraden
xponenten.

Bildet man das Produkt zweier gerader ganzrationaler Funktionen, so erhält man
ilterme der Form $ax^mx^n = ax^{m+n}$, wobei mit m und n und auch die Summe $m+n$
rade ist. Das Produkt zweier gerader ganzrationaler Funktionen ist also wieder eine
rade ganzrationale Funktion.
ldet man das Produkt zweier ungerader ganzrationaler Funktionen, so erhält man
ilterme der Form $ax^mx^n = ax^{m+n}$, wobei – weil m und n ungerade sind – die Summe
$+ n$ nunmehr gerade ist. Das Produkt zweier ungerader ganzrationaler Funktionen
; also eine gerade (!) ganzrationale Funktion.
ildet man das Produkt einer geraden und einer ungeraden ganzrationalen Funktion,
erhält man Teilterme der Form $ax^mx^n = ax^{m+n}$, wobei – weil m gerade und n
ngerade ist – die Summe $m+n$ ungerade ist. Das Produkt einer geraden und einer
ngeraden ganzrationalen Funktion ist also eine ungerade ganzrationale Funktion

) Allgemein gelten die Folgenden Sätze:

ie Summe zweier gerader Funktionen ist eine gerade Funktion.
egründung: Sei $s = f + g$. Aus $f(-x) = f(x)$ und $g(-x) = g(x)$ folgt

$$s(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = s(x).$$

ie Summe zweier ungerader Funktionen ist eine ungerade Funktion.
egründung: Sei $s = f + g$. Aus $f(-x) = -f(x)$ und $g(-x) = -g(x)$ folgt

$$s(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -s(x).$$

Das Produkt zweier gerader Funktionen ist eine gerade Funktion.
Begründung: Sei $p = f \cdot g$. Aus $f(-x) = f(x)$ und $g(-x) = g(x)$ folgt

$$p(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = p(x).$$

Das Produkt zweier ungerader Funktionen ist eine *gerade* Funktion.
Begründung: Sei $p = f \cdot g$. Aus $f(-x) = -f(x)$ und $g(-x) = -g(x)$ folgt

$$p(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = p(x).$$

Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.
Begründung: Sei $p = f \cdot g$. Aus $f(-x) = f(x)$ und $g(-x) = -g(x)$ folgt

$$p(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -(f(x) \cdot g(x)) = -p(x).$$

5 a) $f(-x) = -f(x) \wedge 0 \in D(f) \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

b) Wegen $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = a_nx^n(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1)$ gilt für ungerades n:

für $a_n > 0$ ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$,

für $a_n < 0$ ist $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

Da alle ganzrationalen Funktionen stetig sind, folgt die Behauptung.

c) Beispiele: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ für } x < 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ 1 \text{ für } x > 0 \end{cases}$, $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

6 a) Die Aussage ist wahr. Hat die Ableitung f' einer ganzrationalen Funktion f keine Nullstelle, dann gilt entweder $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h., f ist entweder überall streng monoton steigend oder überall streng monoton fallend und besitzt folglich keine lokalen Extrema.

b) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$ mit $x_0 = 0$.

c) Die Aussage ist wahr. Ist $f''(x_0) \neq 0$, dann ist f' in einer Umgebung U von x_0 streng monoton und der Graph von f ist in der gesamten Umgebung U entweder linksgekrümmt oder rechtsgekrümmt und besitzt folglich in x_0 keinen Wendepunkt.

d) Die Aussage ist wahr. Ist $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f in einer Umgebung U von x_0 streng monoton und besitzt folglich in x_0 kein lokales Extremum.

Umkehrung: Wenn $f'(x_0) = 0$ gilt, dann hat die Funktion f in x_0 eine lokale
mwertstelle.
nbeispiel: $f(x) = x^3,\ x_0 = 0$.

Jmkehrung: Wenn f an der Stelle x_0 ein lokals Minimum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) > 0$.
nbeispiel: $f(x) = x^4,\ x_0 = 0$.

Jmkehrung: Wenn $f''(x_0) = 0$ gilt, dann hat f in x_0 eine Wendestelle.
nbeispiel: $f(x) = x^4,\ x_0 = 0$.

Jmkehrung: Wenn x_0 eine Wendestelle von f ist, dann gilt $f''(x_0) = 0$ und
$_0) \neq 0$.
nbeispiel: $f(x) = x^5,\ x_0 = 0$.

us $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ folgt $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$ und $f''(x) = 6x - 6$.
sitzt die Nullstellen

$$x_1 = 1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx -1,1547 \quad \text{und} \quad x_2 = 1 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 2,1547.$$

n $f''(x_1) = -4\sqrt{3} < 0$ hat f bei $x_1 \approx -1,1547$ ein lokales Maximum mit

$$M = f(x_1) = \frac{16}{3}\sqrt{3} \approx 3,0792$$

wegen $f''(x_2) = 4\sqrt{3} > 0$ hat f bei $x_2 \approx 2,1547$ ein lokales Maximum mit

$$m = f(x_2) = -\frac{16}{3}\sqrt{3} \approx -3,0792.$$

okalen Extrempunkte sind also $H(-1,1547|3,0793)$ und $T(2,1547|-3,07920)$.

s gilt $x_1, x_2 \in [-3;3]$ und $f(-3) = -48 < m < f(3) = 0 < M$.
t ist $H(-1,1547|3,0793)$ der absolute Hochpunkt und $T_l(-3|-48)$ der absolute
unkt von f auf $[-3|3]$.

s gilt $x_1 \notin [0;4]$, $x_2 \in [0;4]$ und $m < f(0) = 3 < f(4) = 15$.
t ist $H_r(4|15)$ der absolute Hochpunkt und $T(2,1547|-3,0792)$ der absolute Tief-
von f auf $[0|4]$.

s gilt $x_1 \in [-2;0]$, $x_2 \notin [-2;0]$ und $f(-2) = -15 < f(0) = 3 < M$.
t ist $H(-1,1547|3,0793)$ der absolute Hochpunkt und $T_l(-2|-15)$ der absolute
unkt von f auf $[-2|0]$.

s gilt $x_1 \in [-1;2]$, $x_2 \notin [-1;2]$ und $f(2) = -3 < f(-1) = 0 < M$.
t ist $H(-1,1547|3,0793)$ der absolute Hochpunkt und $T_3(2|-3)$ der absolute Tief-
von f auf $[-1|2]$.

9 Durch Ausklammern von $a_n x^n$ aus dem Funktionsterm

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

ergibt sich

$$f(x) = a_n x^n \cdot \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right).$$

Sowohl für $x \to -\infty$ als auch für $x \to \infty$ streben der Term in der Klammer gegen 1 und x^n bei geradem n gegen ∞. Das Produkt $x^n \cdot \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \cdots \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$ geht also für $x \to \pm\infty$ gegen ∞. Folglich entscheidet das Vorzeichen des Höchstkoeffizient a_n über das Vorzeichen des Ergebnisses und es ergeben sich unmittelbar die angegebenen uneigentlichen Grenzwerte.

10 a) $f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

b) $f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$

c) $f(x) = (x-1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 4$; $T(1|3)$

d) $f(x) = -(x-1)^2 - 3 = -x^2 + 2x - 4$; $H(1|-3)$

11 a) $x = 1,5$ ist lokale Minimalstelle

b) $x = 8$ ist lokale Maximalstelle

c) $x = -2$ ist lokale Maximalstelle; $x = 0$ Wendestelle; $x = 2$ lokale Minimalstelle

d) $x = -3$ ist lokale Minimalstelle; $x = 0$ Wendestelle; $x = 3$ lokale Maximalstelle

e) weder lokale Extremalstellen noch Wendestellen

f) $x = 0$ ist lokale Minimalstelle

12 a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$; $f'(x) = 3x^2 + 4x - 9$; $f''(x) = 6x - 4$; $f'''(x) = 6$;
f ist weder gerade noch ungerade; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$N_1(-3|0)$; $N_2(-2|0)$; $N_3(3|0)$; $Y(0|-18)$; $H(-2,52|1,38)$; $T(1,19|-24,19)$;
$W(-0,667|-11,41)$

b) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$; $f'(x) = 4x^3 - 5x$; $f''(x) = 12x^2 - 5$; $f'''(x) = 24x$;
f ist gerade; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$N_1(-2|0)$; $N_2(-1|0)$; $N_3(1|0)$; $N_4(2|0)$; $Y(0|4)$; $T_1(-1,58|-2,25)$; $H(0|4)$;
$T_2(1,58|-2,25)$; $W_1(-0,91|0,53)$; $W_2(0,91|0,53)$

c) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 16x - 80$; $f'(x) = 3x^2 + 10x - 16$; $f''(x) = 6x + 10$; $f'''(x) = 6$;
f ist weder gerade noch ungerade; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$;
$N_1(-5|0)$; $N_2(-4|0)$; $N_3(4|0)$; $Y(0|-80)$; $H(-4,52|2,13)$; $T(1,18|-90,27)$;
$W(-1,67|-44,07)$