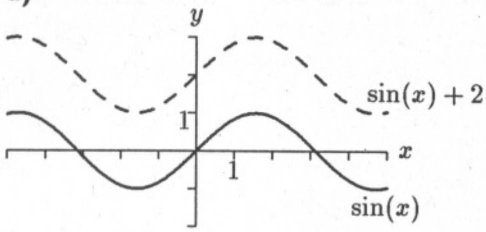
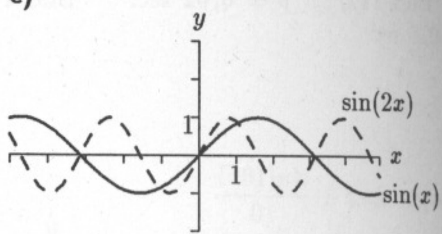
249

a)



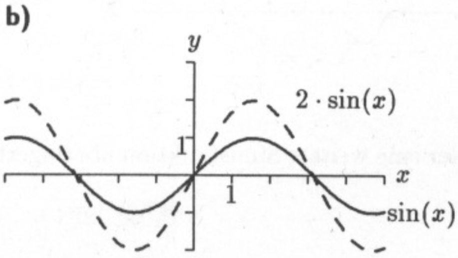
Die Funktion wird um 2 auf der y-Achse verschoben.

c)



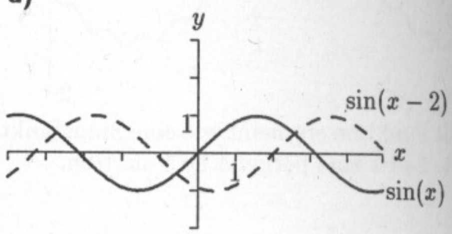
Die Anzahl der Perioden in einem bestimmten Intervall erhöht sich um 2. p=π!

b)



Die Funktion erhält einen größeren Wertebereich (die Amplitude vergrößert sich) WB: [-2;2]

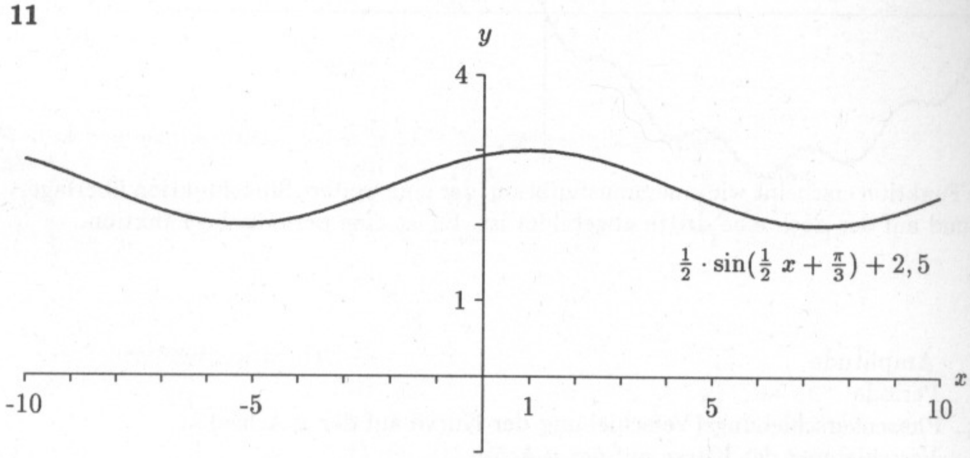
d)



Die Funktion wird auf der x-Achse um 2 verschoben.

10 $A = 1$; $b = 1$; $c = -\frac{\pi}{2}$; $d = 0$ $\Rightarrow f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

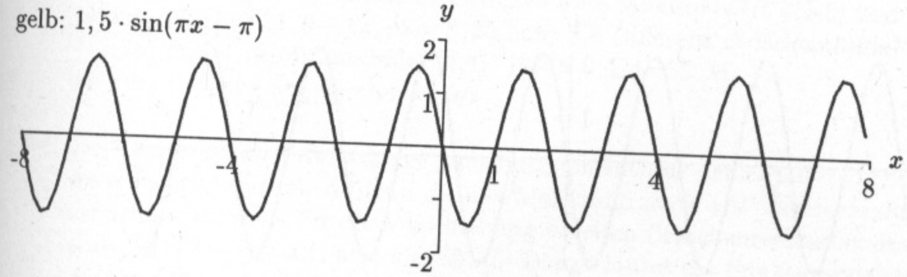
11



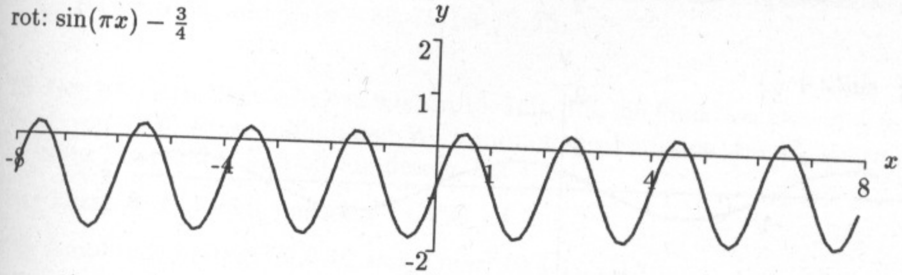
Amplitude … $A = \frac{1}{2}$
Periode … $p = 4\pi$
Phasenverschiebung … x-Achse: $-\frac{2\pi}{3}$
y-Achse: 2,5

12

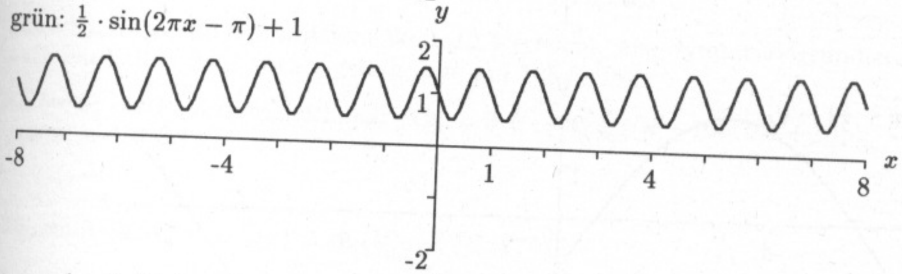
gelb: $1,5 \cdot \sin(\pi x - \pi)$



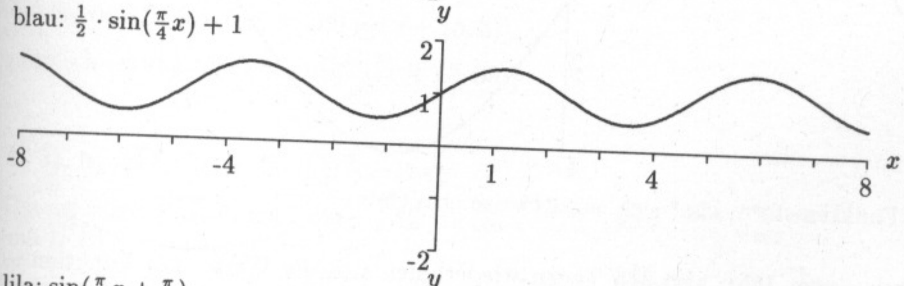
rot: $\sin(\pi x) - \frac{3}{4}$



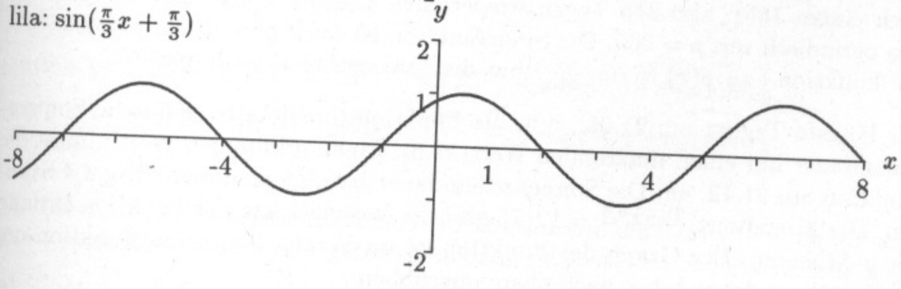
grün: $\frac{1}{2} \cdot \sin(2\pi x - \pi) + 1$



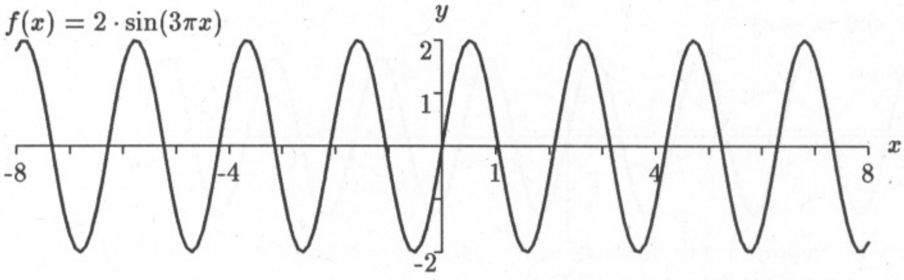
blau: $\frac{1}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{4}x) + 1$

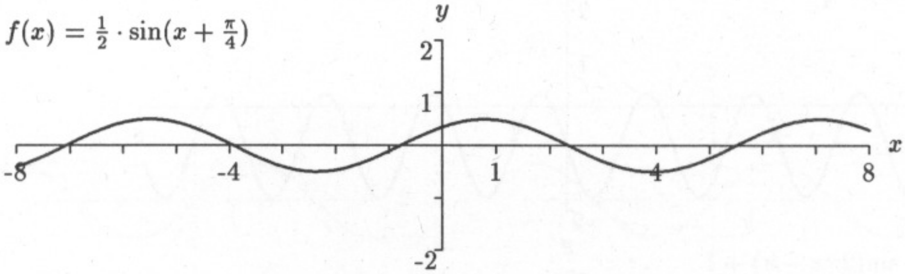


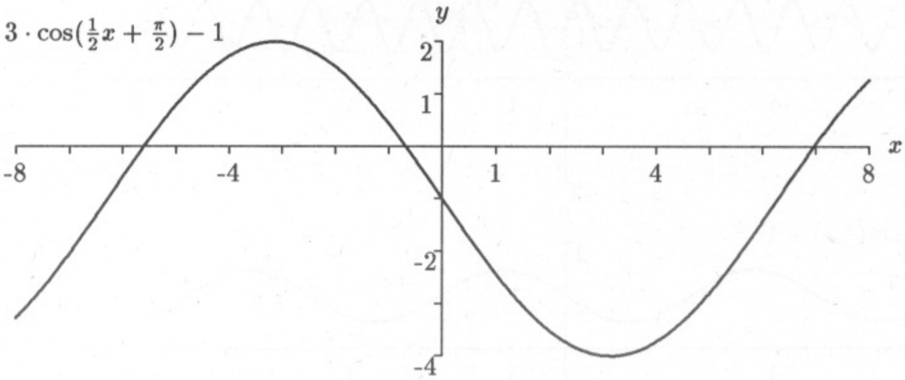
lila: $\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{\pi}{3})$



249 **13**







14 Der Funktionsterm lässt sich schrittweise ermitteln:

1. Nach einem Jahr, also 365 Tagen wiederholen sich die Werte. Die Funktion ist also periodisch mit $p = 365$. Die Sinusfunktion ist auch periodisch: $p = 2\pi$
   Die Funktion f zu $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{365}\right)$ hat die gewünschte Periode $p = 365$.

2. Der längste Tag ist am 21.06., d.h. die Funktion für die astronomische Sonnenscheindauer hat einen maximalen Wert(21,6). Einen minimalen Wert nimmt die Funktion am 21.12. an. Die Sonnenscheindauer beträgt an diesem Tag 4,4 Stunden. Der Mittelwert $\frac{21,6+4,4}{2} = 12,75$ gibt die Verschiebung der Funktion entlang der y-Achse an. Der Graph der Funktion ist im Vergleich zur Sinusfunktion um 12,75 entlang der y-Achse nach oben verschoben.
   Also: $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{365}x\right) + 12,75$

3. Die Amplitude ist die Differenz zwischen dem Maximalwert (21,6) und dem Mittelwert (12,75): $21,6 - 12,75 = 8,35$ bzw. die Differenz zwischen dem Mittelwert (12,75) und dem Minimalwert (4,4): $12,75 - 4,4 = 8,35$ 249
$\Rightarrow f(x) = 8,35 \cdot \sin(\frac{2\pi}{365}x) + 12,75$

4. Der Graph ist im Vergleich zur Sinusfunktion entlang der x-Achse um 80,75 Tage nach rechts verschoben, denn da das Maximum nach 172 Tagen erreicht Tagen erreicht wird, muss für die Verschiebung v gelten (Taschenrechnermodus: RAD): $\sin(\frac{2\pi}{365}(172 - v)) = 1$, also $v = 80,75$. Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = 8,35 \cdot \sin(\frac{2\pi}{365}(x - 80,75)) + 12,75$

15 Den höchsten Wert erhalten wir am 15. Juli, d.h. die Funktion hat einen maximalen Wert von 19,6. Einen minimalen Wert nimmt die Funktion am 15. Januar an. Die mittlere Temperatur beträgt an diesem Tag 1,2°C.

Der Mittelwert beträgt ungefähr 10,4°C.

Die Amplitude beträgt 19,6-10,4=9,2 bzw. 10,4-1,2=9,2

Am 288. Tag wird der mittlere Wert 10,4 erreicht, aus Symmetriegründen muss das auch ein halbes Jahr vorher gelten, d.h. am 105,5. Tag.

So lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = 9,2 \cdot sin(\frac{2\pi}{365}(x - 105,5)) + 10,4$
$f(359) = 1,75332$

16 emotionell (rot): $f(x) = \sin(\frac{2\pi}{23,1}(x + 5,775))$ 250

intellektuell(blau): $f(x) = \sin(\frac{2\pi}{33}(x + 15,3))$

physisch (grün): $f(x) = \sin(\frac{2\pi}{24,9}(x + 10,65))$

17 a), b) $|\overline{FC}| = \sin y, \quad |\overline{AC}| = \cos y$

Daraus folgt: $|\overline{CB}| = \sin x \cos y$, $|\overline{AB}| = \cos x \cos y$, $|\overline{EC}| = \sin x \sin y$ und $|\overline{FE}| = \cos x \sin y$.

Damit:

$\sin(x + y) = |\overline{DE}| + |\overline{EF}| = |\overline{BC}| + |\overline{EF}| = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$

$\cos(x + y) = |\overline{AB}| - |\overline{DB}| = |\overline{AB}| - |\overline{EC}| = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$

18 Die Sinusfunktion ist eine ungerade Funktion mit $\sin(-x) = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Kosinusfunktion ist eine gerade Funktion mit $\cos(-x) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sin(x - y) = \sin(x + (-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

b) $\cos(x - y) = \cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

250 **c)** $\tan(x+y) = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \dfrac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$

$$= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} \cdot \frac{1}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \cdot \frac{1}{\cos x \cos y}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}\right)}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

d) mit $\tan(x-y) = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}$ entsprechend.

19 a) $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x$

b) $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$

c) $\tan(2x) = \tan(x+x) = \dfrac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x} = \dfrac{2 \tan x}{1 - (\tan x)^2}$

20 a) $\sin(x+y+z) = \sin(x+(y+z)) = \sin x \cos(y+z) + \cos x \sin(y+z)$
$= \sin x(\cos y \cos z - \sin y \sin z) + \cos x(\sin y \cos z + \cos y \sin z)$
$= \sin x \cos y \cos z - \sin x \sin y \sin z + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z$

b) mit a: $\sin(3x) = \sin(x+x+x)$
$= \sin x \cos x \cos x - \sin x \sin x \sin x + \cos x \sin x \cos x + \cos x \cos x \sin x$
$= 3 \sin x (\cos x)^2 - (\sin x)^3 = 3 \sin x(1 - (\sin x)^2) - (\sin x)^3 = 3 \sin x - 4(\sin x)^3$

c) $\cos(x+y+z) = \cos(x+(y+z)) = \cos x \cos(y+z) - \sin x \sin(y+z)$
$= \cos x(\cos y \cos z - \sin y \sin z) - \sin x(\sin y \cos z + \cos y \sin z)$
$= \cos x \cos y \cos z - \cos x \sin y \sin z - \sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \sin z$

d) $\cos(3x) = \cos(x+x+x)$
$= \cos x \cos x \cos x - \cos x \sin x \sin x - \sin x \sin x \cos x - \sin x \cos x \sin x$
$= (\cos x)^3 - 3 \cos x (\sin x)^2 = (\cos x)^3 - 3 \cos x(1 - (\cos x)^2) = 4(\cos x)^3 - 3 \cos x$

e) $\tan(x+y+z) = \tan(x+(y+z)) = \dfrac{\tan x + \tan(y+z)}{1 - \tan x \tan(y+z)}$

$$= \frac{\tan x + (\tan y + \tan z)}{(1 - \tan y \tan z)} \frac{(1 - \tan x(\tan y + \tan z)}{1 - \tan y \tan z}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z}{1 - \tan x \tan z - \tan y \tan z - \tan x \tan y}$$

f) $\tan(3x) = \tan(x+x+x) = \dfrac{3 \tan x - (\tan x)^3}{1 - 3(\tan x)^2}$

oder $\tan(3x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = \dfrac{3 \sin x (\cos x)^2 - (\sin x)^3}{(\cos x)^3 - 3 \cos x (\sin x)^2}$; erweitern mit $\dfrac{1}{(\cos x)^2}$

7.2 Ableitung der Winkelfunktionen

Hinweise zur Bearbeitung der Aufträge

A1 **Grafische Ableitung der Sinusfunktion** 251

Man verfährt wie bei der Exponentialfunktion (vergleiche Seite 142).

A2 **Numerische Ableitung der Sinusfunktion**

Dieser Auftrag wird im Lehrtext (Schülerbuch, Seite 252f.) bearbeitet.

A3 **Ableitung der Sinusfunktion** 252

Dieser Auftrag wird im Lehrtext (Schülerbuch, Seite 253f.) bearbeitet.

Lösungen der Aufgaben

1 a), b) analoge Vorgehensweise 261

c) $$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$
$$= \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \to -\sin x \text{ für } h \to 0$$

2 unter Verwendung der Anleitung:

a) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}}{1} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{-(\sin(x+h)-\sin x)}{\sin(x+h)\cdot\sin x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-\cos x}{\sin(x+h)\cdot\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{1} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{-(\cos(x+h)-\cos x)}{\cos(x+h)\cdot\cos x}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-(-\sin x)}{\cos(x+h)\cdot\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(2x+2h)-\sin(2x)}{h} = 2\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(2x+2h)-\sin(2x)}{2h} = 2\cos(2x)$

d) analog zu c: $f'(x) = -\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$

3 a) $f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$
$f^4(x) = \sin x$

b) $f(x) = \cos x$
$f'(x) = -\sin x$
$f''(x) = -\cos x$
$f'''(x) = \sin x$
$f^4(x) = \cos x$

Es ist zu sehen, dass die 4. Ableitung wieder gleich der Funktion ist.