261 **4 a)** $f'(x) = 1 + \cos x$ $\quad f''(x) = -\sin x$

b) $f'(x) = 3\cos x + 20x^3$ $\quad f''(x) = -3\sin x + 60x^2$

c) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\cos x$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}} + \frac{1}{2}\sin x$

d) $f'(x) = \cos x - \sin x$ $\quad f''(x) = -\sin x - \cos x$

e) $f'(x) = -2\sin x - 8x$ $\quad f''(x) = -2\cos x - 8$

f) $f'(x) = -\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{x^2}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{4}\cos x - \frac{2}{x^3}$

g) $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{2}\cdot(1 + \tan^2 x)$ $\quad f''(x) = 2e^x - \tan x(1 + \tan^2 x)$

h) $f'(x) = 1 + \tan^2 x + \frac{1}{3x}$ $\quad f''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x) - \frac{1}{3x^2}$

i) $f'(x) = \cos x + 1 + \tan^2 x$ $\quad f''(x) = -\sin x + 2\tan x(1 + tan^2 x)$

5 $f(x) = \sin x$ $\quad f''(x) = -\sin x$, also $f(x) + f''(x) = 0$

$f(x) = \cos x$ $\quad f''(x) = -\cos x$, also $f(x) + f''(x) = 0$

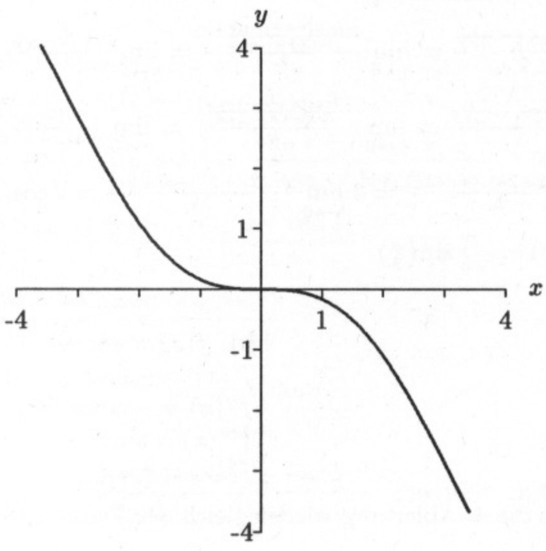
262 **6 a)** $\dot{s}(t) = A\omega\cos(\omega t)$, $\quad \ddot{s}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)$

b) $\frac{\ddot{s}(t)}{s(t)} = -\omega^2$

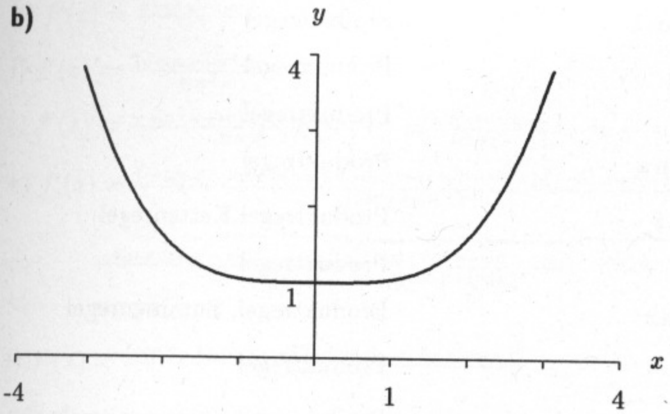
c) $P(t) = \dot{W}(t) = \left[k\cdot s^2(t)\right]' = \left[k\cdot(A\cdot\sin\omega t)^2\right]' = k\cdot 2A\omega(-sin(\omega t))\cdot A\omega\cos(\omega t)$
$\to P(t) = -kA^2\omega^2\sin(\omega t)cos(\omega t)$

7 a) $f'(x) = \cos x - 1 \quad = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

An der Stelle $x = 0$ gilt: $f'(x) = 0$. $f'(x) < 0$ gilt für *kein* x; $f'(x) > 0$ gilt für alle x



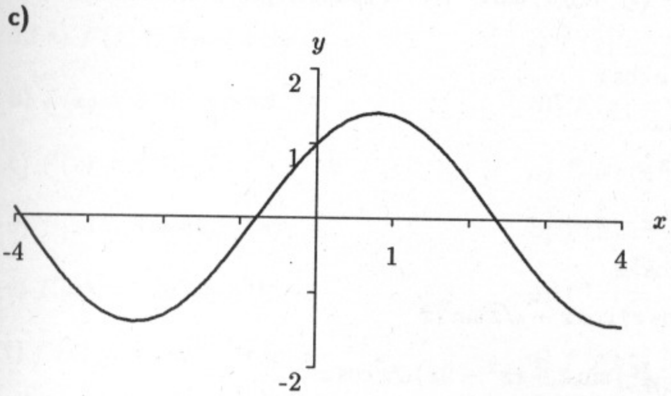
b)



$f'(x) = x - \sin x \quad = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = x \Leftrightarrow x = 0$
An der Stelle $x = 0$ gilt: $f'(x) = 0$

$f'(x) < 0$ gilt für $-\infty < x < 0$
$f'(x) > 0$ gilt für $0 > x > \infty$

c)



$f'(x) = \cos x - \sin x \quad = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = 0$
An der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ gilt: $f'(x) = 0$
Da sin und cos periodisch sind, sind auch die Nullstellen periodisch. NST: $\frac{\pi}{4} + n\pi$!

$f'(x) < 0$ gilt für $-\infty < x < 0$
$f'(x) > 0$ gilt für $0 > x > \infty$

8 a) An der Stelle $x = 0$ gilt: $f(x) = \sin x$ und $\sin x$ ist n-mal differenzierbar.

b) An der Stelle $x = 0$ gilt: $f(x) = \cos x$ und $\cos x$ ist n-mal differenzierbar.

9 $f'(x) = 2\sin x \cos x = 0$, d.h. die Steigung der Funktion ist überall Null, daraus folgt, die Funktion ist konstant. Der Wertebereich beträgt $W(f) = \{1\}$. Also $f(x) = 1$.

10 a) $f'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x$	Produktregel
b) $f'(x) = 2\cos x \sin x$	Produktregel
c) $f'(x) = -2\sin x\cos x$	Produktregel
d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x - \sqrt{x}\sin x$	Produktregel
e) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin x + \frac{1}{x}\cos x$	Produktregel,Kettenregel
f) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	Produktregel
g) $f'(x) = \sin x + x\cos x + 4x$	Produktregel, Summenregel
h) $f'(x) = \frac{\sin x}{4\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}\cos x}{2}$	Produktregel
i) $f'(x) = 8\sin x\cos x - 1$	Produktregel, Summenregel
j) $f'(x) = 4\cos x\sin x$	Produktregel, Summenregel
k) $f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}\right)\sin x + \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\cos x$	Produktregel, Summenregel
l) $f'(x) = \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cos x - \left(x^2 + \sqrt{x}\right)\sin x$	Produktregel, Summenregel

11 a) $f'(x) = \cos^2 x - 2x\sin x\cos x$

b) $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\sin x + \frac{1}{x^2}\cos x$

c) $f'(x) = 2\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$

d) $f'(x) = \sin x\cos x + x\cos^2 x - x\sin^2 x$

e) $f'(x) = -2\sin^2 x\cos x + \cos^3 x$

f) $f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x\right)\cos x - \sqrt{x}\sin^2 x$

g) $f'(x) = \left((2x-2)\sqrt{x} + \frac{x^2-2x}{2\sqrt{x}}\right)\sin x + (x^2-2x)\sqrt{x}\cos x$

h) $f'(x) = \left(-\frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)\cos x - \frac{\sqrt{x}}{x}\sin x$

i) $f'(x) = \left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\sin^2 x + (x^3 - \sqrt{x})\cdot 2\sin x\cos x$

12 a) $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

b) $f'(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

c) $f'(x) = -\frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x}$

d) $f'(x) = -\frac{\sin x}{x\cdot\sqrt{x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

e) $f'(x) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$

f) $f'(x) = -\frac{1}{\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$ *oder* $-\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\tan^2 x} - 1$

g) $f'(x) = \frac{-2-2\tan^2 x}{\tan^5 x}$

h) $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

i) $f'(x) = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}$

j) $f'(x) = \frac{-\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x - \cos x}{(\sin x - 1)^2} = \frac{\sin x - \cos x - 1}{(\sin x - 1)^2}$, da $-(\sin^2 x + \cos^2 x) = -(1)$.

k) $f'(x) = \frac{(-\sin x - \cos x)\cdot(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)\cdot(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{-\sin x\cos x \overbrace{-\sin^2 x - \cos^2 x}^{=-1} \overbrace{-\sin x\cos x + \sin x\cos x}^{=0} \overbrace{-\cos^2 x - \sin^2 x}^{=-1} + \sin x\cos x}{(\cos x + \sin x)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{-2}{(\cos x + \sin x)^2}$

l) $f'(x) = \frac{(\cos x - 1)\cdot(\cos x - x) - (\sin x - x)\cdot(-\sin x - 1)}{(\cos x - x)^2}$

m) $f'(x) = -\frac{(\cos x + x\sin x)}{x^2\cos^2 x}$

n) $f'(x) = \frac{\tan x - x(1+\tan^2 x)}{\tan^2 x}$

o) $f'(x) = \frac{-(\tan x + x(1+\tan^2 x))}{x^2\tan^2 x}$

13 a) $f'(x) = 3\sin^2 x\cos x$

b) $f'(x) = 6\sin^5 x\cos x$

c) $f'(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

d) $f'(x) = 2\cos(2x-3)$

e) $f'(x) = -2x\sin(x^2)$

f) $f'(x) = n\cdot\sin^{n-1} x\cos x$

g) $f'(x) = -n\cdot\cos^{n-1} x\sin x$

h) $f'(x) = 2x\cos(x^2)$

i) $f'(x) = 2\sin(1-2x)$

j) $f'(x) = \frac{4\sin x}{\cos^5 x}$

k) $f'(x) = -\frac{n\cos x}{\sin^{n+1} x}$

l) $f'(x) = \frac{n\sin x}{\cos^{n+1} x}$

m) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(1 + \tan x$

n) $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}\cdot\cos\frac{1}{\sqrt{x}}$

o) $f'(x) = \frac{3\cos x}{2\sqrt{3\sin x}}$

p) $f'(x) = \frac{-2x\cos(x^2)}{2\sqrt{\sin(x^2)\sin(x^2)}} = -\frac{x\cos(x^2)}{\sqrt{\sin^3(x^2)}}$

q) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\tan(\frac{x}{2})}}\cdot\left(1 + \tan^2(\frac{x}{2})\right)\cdot\frac{1}{2}$

r) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

s) $f'(x) = -\frac{x\sin^2 x}{\sqrt{\cos^2 x}}$

t) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1+\tan x}{2\sqrt{\tan\sqrt{x}}}$

u) $f'(x) = -\frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{1+\tan\frac{1}{x}}{2\sqrt{\tan\sqrt{\frac{1}{x}}}}$

14 a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{2}$

c) $\frac{\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{4}$

f) 0

g) $\frac{\pi}{6}$

h) $\frac{\pi}{6}$

i) $\frac{\pi}{3}$

a) 0	**e)** $\approx 5,2$	**i)** $\approx 0,7071$
1	**f)** $\approx 0,289$	**j)** $\approx 0,5774$
1	**g)** -2	**k)** 1
$\frac{1}{4}$	**h)** $\approx 0,7071$	**l)** $\frac{1}{3}$

Für $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ und $y \in]-1;1[$ gilt: $y = f(x) = \sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = f^*(y) = \arcsin y$.
thilfe des Satzes 1.4 folgt: $f'(x) = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2} \neq 0 \quad \Rightarrow$
$)'(y) = \frac{1}{f'(f^*(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für $y \in]-1;1[$. Durch Ersetzen von y durch x folgt
$)'(x) = \frac{1}{f'(f^*(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für $x \in]-1;1[$.

r $x \in [0;\pi]$ und $y \in]-1;1[$ gilt: $y = f(x) = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = f^*(y) = \arccos y$.
thilfe des Satzes 1.4 folgt: $f'(x) = -\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sqrt{1-y^2} \neq 0 \quad \Rightarrow$
$)'(y) = \frac{1}{f'(f^*(y))} = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}$ für $y \in]-1;1[$. Durch Ersetzen von y durch x folgt
$)'(x) = \frac{1}{f'(f^*(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für $x \in]-1;1[$.

a) $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$	**e)** $f'(x) = -\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1-(x^2-1}}$	**i)** $f'(x) = 1$
$f'(x) = \frac{1}{3\cdot\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}$	**f)** $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	**j)** $f'(x) = 1$
$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$	**g)** $f'(x) = 0$	**k)** $f'(x) = \frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$
$f'(x) = \frac{x}{\lvert x\rvert\sqrt{1-x^2}}$	**h)** $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$	**l)** $-\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$

Bei fast allen Ableitungen der Aufgabe 17 – Ausnahmen bilden g), i) und j) – ist fach die Kettenregel anzuwenden.

Aufgabe i) beachte man: $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Die Aufgaben i) und j) vereinfa-n sich wegen $\arcsin(\sin x) = x$ und $\arctan(\tan x) = x$.

Mit den Bezeichnungen $f_1(x) = \arcsin x$, $f_2(x) = \arccos x$ gilt:
ist $f_1(x) = \frac{\pi}{2} - f_2(x)$ und somit $f_1'(x) = -f_2'(x)$ bzw $f_2'(x) = -f_1'(x)$.

a) $D(f) = [0;4]$; $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$; $D(f') =]0;4[$

$D(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{-2x}{\lvert x\rvert\cdot(1+x^2)}$; $D(f') = \mathbb{R}_{\neq 0}$

$D(f) = [-1;1]$; $f'(x) = \frac{2(1-2x^2)}{\lvert 1-x^2\rvert\cdot\sqrt{1+x^2}}$; $D(f') =]-1;1[$

d) $D(f) = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{\lvert 1-x^2\rvert\cdot(1+x^2)}$; $D(f') = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

e) $D(f) = [-2;2] \cup \mathbb{R}_{\geq 4} \cup \mathbb{R}_{\leq -4}$;

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\lvert x-3\rvert}{\sqrt{(x-3)^2-1}\cdot(x+3)^2} & \text{für } x \in D(f') \cap \mathbb{R}_{\geq 0} \\ -\dfrac{\lvert x+3\rvert}{\sqrt{(x+3)^2-1}\cdot(x+3)^2} & \text{für } x \in D(f') \cap \mathbb{R}_{<0} \end{cases}$$

$D(f') = D(f) \setminus \{-4;-2;2;4\}$

f) $D(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$; $f'(x) = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(1+x)}$; $D(f') = \mathbb{R}_{>0}$

21 a) 120 km/h $= \frac{100}{3}$ m/s
$\alpha(t) = \arctan(\frac{100}{3}\cdot\frac{1}{30}t) = \arctan(\frac{10}{9}t)$
$\alpha'(t) = \frac{10}{9}\cdot\frac{1}{1+(\frac{10}{9}t)^2} = \frac{90}{81+100t^2}$

Bei einer Geschwindigkeit von $\frac{100}{3}$ m/s werden 150 m in 4,5 Sekunden zurückgelegt. Für $t = 4,5$ ergibt sich eine Winkelgeschwindigkeit von $\alpha'(4,5) = \frac{90}{81+2025} \approx 0,042735$.

Bei einer gemessenen Winkelgeschwindigkeit von 0,05 muss der Trucker mit Schwierigkeiten rechnen.

b) Fehlerbetrachtung z.B. mit DERIVE oder einer Tabellenkalkulation durch folgende Funktionen mit a als Abweichung für die Strecke von 30 m und b als Abweichung für die Strecke von 150 m:

$\alpha(t) = \arctan \frac{100}{3(30+a)}t$

$\alpha'(t) = \frac{300(30+a)}{10000t^2+9(30+a)^2}$ und $t = \frac{3(150+b)}{100}$

Beispiel: Bei einer Abweichung von $a = 2$, also der tatsächlichen Strecke von 32 m statt der gemessene von 30 m Länge und einer Abweichung von $b = -8$, also der tatsächlichen Strecke von 142 m statt der gemessenen von 150 m ergibt sich: $t = 4,26$ $\alpha'(4,26) = 0,05$.

22 a) mittels Plotterprogramm

b) x ist die Zeit, $f(x)$ die Elongation

c) Die Geschwindigkeit entspricht der Ableitung der Funktion; in den lokalen Extremwerten hat die Geschwindigkeit den Wert 0.

d) An den Wendestellen ist die Geschwindigkeit jeweils maximal.
Für die Funktion f: $\tan \pi x = \frac{100\pi^2-(\ln 2)^2}{20\ln 2\pi}$. Wegen der Periodizität der Tangensfunktion: $x = n - 0,514043$ $(n \in \mathbb{Z})$.
Für die Funktion g: $\tan \pi x = \frac{40\pi}{4-100\pi^2}$, $x = n - 0,040474$ $(n \in \mathbb{Z})$.