Kursarbeit 13 MA 1 2.12.2008

① Für $n=0$ ist die Scharfunktion die wohlbekannte Normalparabel. Deshalb sei ab jetzt $n \geq 1$.

1.1. $f_n(x) = x^2 \cdot \cos(nx) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \cos(nx) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad nx = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für $n=2$ ergeben sich also im Intervall $[0;\pi]$ die Nullstellen $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi$.

1.2. Es gilt

$$-1 \leq \cos(nx) \leq 1 \quad \text{, also}$$

$$-x^2 \leq x^2\cos(nx) \leq x^2 \quad \text{, d.h.}$$

$$p_2 \leq f_n \leq p_1$$

Ein Berührpunkt liegt dann vor, wenn

$$\cos(nx) = \pm 1 \quad \text{, also}$$

$$x = \frac{k}{n} \cdot \pi$$

Hierbei liegt ein oberer Berührpunkt vor, wenn k gerade ist und ein unterer Berührpunkt, wenn k ungerade ist.

1.3. Kann sich jeder mit Geogebra anschauen.

1.4. Für die Ableitungsfunktionen erhält man mit der Produktregel

$$f_n'(x) = 2x\cos(nx) - nx^2\sin(nx)$$

$$f_n''(x) = 2\cos(nx) - 4nx\sin(nx) - n^2x^2\cos(nx)$$

Einsetzen von $\frac{\pi}{2n}$ liefert

$$f_n''\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 0 - 4n\frac{\pi}{2n} \cdot \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2n}\right) - 0 = -2\pi$$

1.5. $F_n(x) = \int f_n(x)\,dx = \int x^2 \cos(nx)\,dx$

$$= \left[x^2 \cdot \frac{1}{n}\sin(nx)\right] - \int 2x \cdot \frac{1}{n}\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{n}\sin(nx) - \frac{2}{n}\int x \cdot \sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{n}\sin(nx) - \frac{2}{n}\left(\left[x \cdot \frac{-1}{n}\cos(nx)\right] - \int \frac{-1}{n}\cos(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{x^2}{n}\sin(nx) + \frac{2x}{n^2}\cos(nx) - \frac{2}{n^2}\int \cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{n}\sin(nx) + \frac{2x}{n^2}\cos(nx) - \frac{2}{n^3}\sin(nx) + c$$

1.6. Die nächste Nullstelle ist $\frac{\pi}{2n}$, also

$$A(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} f_n(x)\,dx = \left[F_n(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2n}}$$

$$= F_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) - F_n(0)$$

$$= \frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2}{n} \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{2n}\right) + 0 - \frac{2}{n^3}\sin\left(n\frac{\pi}{2n}\right) - 0$$

$$= \frac{\pi^2}{4n^3} - \frac{2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)$$