

4.2 Leistungskurs

Aufgabe 1 Vegetation

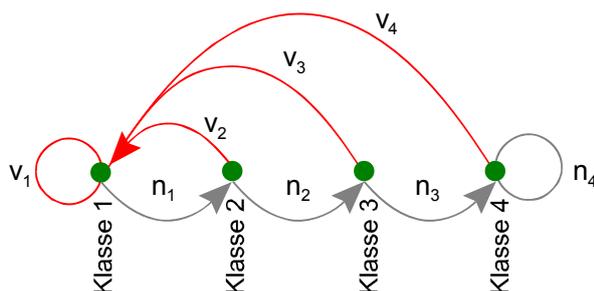
Quelle: Wiskunde A (1. Termin), Aufgabe 3, 1994, zum Teil veränderte Zahlenwerte

In der Übergangszone zwischen Wüstenklima und gemäßigttem Klima an der Westküste Nordamerikas trifft man auf einer Fläche von ca. 2000 km² eine Vegetation immergrüner Sträucher an. Man bezeichnet das als „Chaparral“. Die Brennbarkeit dieser Pflanzen ist sehr von ihrem Alter abhängig. Wegen der großen Mengen verdorrten Materials brennen vor allem die älteren Pflanzen sehr leicht. Brände haben abgesehen von ihrer Gefahr für Mensch und Tier auch eine sehr nützliche Funktion: anstelle der verbrannten Sträucher wachsen ziemlich schnell junge, kräftige Pflanzen aus dem Boden. Spontane Brände werden daher nicht immer gelöscht. Die Verjüngung sorgt immer wieder dafür, dass keine großen Gebiete mit dürrerem Material entstehen, die durch Brände bis hin zu einer Katastrophe Schaden nehmen könnten.

Diese Situation lässt sich in einem Modell darstellen, bei dem man von folgenden Annahmen ausgeht:

- Die Vegetation wird entsprechend ihrem Alter in vier Klassen eingeteilt:
 Klasse 1: 0 – 10 Jahre
 Klasse 2: 10 – 20 Jahre
 Klasse 3: 20 – 30 Jahre
 Klasse 4: 30 Jahre und älter
- Als Maß für den Umfang einer Klasse nimmt man nicht die Anzahl der Pflanzen, sondern die Fläche des durch diese Klasse bedeckten Gebietes.
- Bei jeder Klasse bleibt der prozentuale Anteil, der in jeweils 10 Jahren verbrennt, konstant.
- Die Gesamtfläche des Gebietes beträgt stets 2000 km².

Für dieses Modell kann der folgende Graph gezeichnet werden:



Bezeichnungen:

v_i = Anteil von Klasse i , der verbrennt
($v_i < 1$)

n_i = Anteil von Klasse i , der nicht verbrennt
($n_i < 1$)

- a) Erläutern Sie, welche Bedeutung die v_i und n_i in diesem Graphen haben.

Stellen Sie gemäß dem Graphen bzw. dem oben beschriebenen Modell eine Populationsmatrix (Leslie-Matrix) M auf und begründen Sie Ihr Vorgehen.

- b) Aus nebenstehender Tabelle können Sie entnehmen, wie groß die Fläche in km² ist, die jede Klasse zum Zeitpunkt $t = 0$ (jetzt) und $t = 1$ (10 Jahre später) bedeckt.

Klasse	$t = 0$	$t = 1$
1	600	424
2	400	594
3	300	392
4	700	590

Berechnen Sie v_1 , v_2 , n_1 und n_2 .

- c) Die Leslie-Matrix für die in b) genannten Zahlen lautet: $M = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,2 & 0,5 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,5 \end{pmatrix}$

Über die Gleichung $M \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,2 & 0,5 \\ 0,99 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \\ 300 \\ 700 \end{pmatrix}$

werden in b) Flächengrößen der jeweiligen Klassen berechnet.

Diesen Vorgang kann man sich auch als Funktion mit mehreren Variablen vorstellen.

Beschreiben Sie diese Funktion f . Wie sieht das Urbild (*die Definitionsmenge*) aus, wie das Bild (*die Wertemenge*)?

- d) Von der Matrix M aus Aufgabenteil a) wurden mit dem Computer die Potenzen M^2 , M^3 , M^4 ... usw. berechnet. Man stellt fest, dass die Matrizen M^n sich für größere Werte von n kaum noch voneinander unterscheiden. So stimmen die auf vier Nachkommastellen gerundeten Matrizen M^n für $n \geq 30$ mit der folgenden Matrix überein:

$$\begin{pmatrix} 0,2216 & 0,2216 & 0,2216 & 0,2216 \\ 0,2194 & 0,2194 & 0,2194 & 0,2194 \\ 0,2150 & 0,2150 & 0,2150 & 0,2150 \\ 0,3440 & 0,3440 & 0,3440 & 0,3440 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich, dass in jeder Zeile die Zahlen (gerundet) übereinstimmen.

Was kann man daraus für die Chaparral-Vegetation folgern?

- e) In der Praxis führen die Verwalter des Chaparral auch noch ein kontrolliertes, gewolltes Abbrennen von Teilen der Vegetation, die älter als 10 Jahre ist, durch. In unserem Modell nehmen wir zur Vereinfachung an, dass das Abbrennen immer unmittelbar nach Ablauf von 10 Jahren auf einmal stattfindet. Nehmen wir weiter an, dass stets 2 % von Klasse 2, sowie 3 % von Klasse 3 und 7 % von Klasse 4 abbrennen. Dieser Vorgang des gewollten Abbrennens kann ebenfalls durch eine 4×4 -Matrix beschrieben werden, in der die oben genannten Prozentzahlen benutzt werden. Stellen Sie diese Matrix N auf und erklären Sie Ihr Vorgehen. Beschreiben Sie den gesamten zehnjährigen Vorgang des spontanen und gewollten Abbrennens mithilfe der Matrizen N und M . Begründen Sie Ihre Antwort.