83 **c)** Der *Beweis* folgt unmittelbar durch das Einsetzen von $a = 1$ und $b = -1$ in die Formel zum Binomischen Satz:

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}. \quad \text{q.e.d.}$$

In der Tat verschwinden im Pascal'schen Dreieck die alternierenden Zeilensummen.

Zusatz: Der bei den Lösungen zu b) und c) verwendete Binomische Satz wird in Auftrag A5 begründet; ein Beweis kann mithilfe der Formel $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ bewiesen werden. Nehmen wir also zunächst an, dass für ein spezielles n die Formel

$(a+b)^n \;= \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ gilt, dann folgt nach Multiplikation mit $(a+b)$ daraus:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

Nimmt man also an, dass die Formel für eine gewisse natürliche Zahl n gilt, dann folgt daraus die Gültigkeit für den Nachfolger n + 1.

Nun kann man im vorliegenden Fall leicht eine natürliche Zahl finden, für die die Formel gilt: Bereits für $n = 0$ ist nämlich $(a+b)^0 = 1$ und ebenso $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} \cdot 1 \cdot 1 = 1$,

also $(a+b)^0 = \sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$. Die Formel gilt also für die natürliche Zahl 0. Nach obigen Überlegungen gilt die Formel dann auch für deren Nachfolger 1, damit auch für deren Nachfolger 2, damit wiederum für deren Nachfolger 3 usw., also schließlich für alle $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Damit haben wir den Binomischen Satz (durch vollständige Induktion) bewiesen.

3 83

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \boxed{1} & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & \boxed{3} & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & \boxed{6} & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & \boxed{10} & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & \boxed{15} & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & \boxed{35} & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Man bewegt sich im Pascal'schen Dreieck bei einer beliebigen am Anfang einer Zeile stehenden 1 beginnend mit jedem Schritt eine Zeile abwärts und eine Stelle nach rechts. Die Bewegung kann nach einer beliebigen Zahl von Schritten abgebrochen werden. Stets ist die Summe der Zahlen, die bei der Bewegung aneinander gereiht wurden, gleich der Zahl, die in der Zeile unter der letzten Zahl links unter der letzten Zahl steht.

4 Es entstehen $\binom{12}{3} = 220$ Dreiecke.

5 a) Anzahl der Möglichkeiten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge: $\binom{11}{5} = 462$

b) Anzahl der Möglichkeiten bei Berücksichtigung der Reihenfolg: $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440$

6 Es gibt $\binom{12}{2} = 66$ Handschläge.

Es gibt $66 - 6 = 60$ Handschläge, wenn Ehepartner sich jeweils nicht voneinander durch Handschlag verabschieden.

7 Anzahl der Kartenverteilungen beim Skatspiel:

$\binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} = 64512240 \cdot 646646 \cdot 66 \approx 2{,}752 \cdot 10^{15}$

$P(2 \text{ Asse}) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248} \approx 0{,}0121$

$P(2 \text{ Kreuz}) = \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} = \frac{7}{124} \approx 0{,}0565$

$P(1 \text{ Asse und } 1 \text{ Bube}) = \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} = \frac{7}{124} \approx 0{,}0565$

8 Als Gruppen sollen nichtleere Teilmengen der n Personen verstanden werden.

Es gibt $\binom{n}{1}$ Möglichkeiten für eine Gruppe, die aus genau einer Person besteht.
Die jeweils $n - 1$ anderen Personen bilden jedes Mal die 2. Gruppe.

Es gibt $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten für eine Gruppe, die aus genau zwei Personen besteht.
Die jeweils $n - 2$ anderen Personen bilden jedes Mal die 2. Gruppe.

$\vdots$

Es gibt $\binom{n}{n-1}$ Möglichkeiten für eine Gruppe, die aus genau $n - 1$ Personen besteht.
Die jeweils eine andere Person bildet jedes Mal die 2. Gruppe.

83 Insgesamt können also auf $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n-1}$ Arten zwei Gruppen gebildet werden, falls die Reihenfolge, in der die Gruppen gebildet werden, zu berücksichtigen ist. Ist die Reihenfolge ohne Bedeutung, so halbiert sich die Anzahl: $\frac{1}{2}\cdot\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n-1}\right]$.

Vergleicht man die zu betrachtende Summe $S=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n-1}$ mit der aus Aufgabe 2 b, so erkennt man:

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=\binom{n}{0}+S+\binom{n}{n}=S+2.$$

Demnach ist $S=2^n-2$.

Bei Berücksichtigung der Reihenfolge können somit 2^n-2 Gruppen gebildet werden. Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge können $2^{n-1}-1$ Gruppen gebildet werden.

9 Nach Aufgabe 2 b gibt es insgesamt $2^{25}=33\,554\,432$ Möglichkeiten, die Autos in den Parkhäusern unterzubringen. Bei zwei von ihnen stehen alle 25 Autos in einem der beiden Parkhäuser. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\frac{2}{33\,554\,432}\approx 0{,}000\,000\,0596$.

10 Insgesamt gibt es 10^5 fünfstellige Zahlen, wenn auch führende Nullen zugelassen sind. $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=30\,240$ dieser Zahlen bestehen aus fünf verschiedenen Ziffern. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist also $\frac{30\,240}{100\,000}=0{,}3024$.

84 **11** Insgesamt gibt es 6^k Ergebnisse beim k-maligen Werfen des Würfels.

$6\cdot 5\cdots(6-k+1)$ dieser Ergebnisse bestehen aus k verschiedenen Augenzahlen.

Die Wahrscheinlichkeit $P_k(V)$, bei k Würfen k verschiedene Augenzahlen zu werfen ist demnach

$$P_k(V)=\frac{6\cdot 5\cdots(6-k+1)}{6^k}.$$

k	$P_k(V)$	
2	$\frac{30}{36}$	$\approx 0{,}8333$
3	$\frac{120}{216}$	$\approx 0{,}5556$
4	$\frac{360}{1296}$	$\approx 0{,}2778$
5	$\frac{720}{7776}$	$\approx 0{,}0926$
6	$\frac{720}{46\,656}$	$\approx 0{,}0154$

12 Würde ein vollständiges Baumdiagramm gezeichnet werden, so enthielte es 243 Pfade. 84 4

Anzahl gezogener Farben	Anzahl blaue Kugeln	Anzahl gelbe Kugeln	Anzahl rote Kugeln	Wahrscheinlichkeit eines solchen Pfades	Anzahl der Pfade mit der genannten Anzahl blauer, gelber und roter Kugeln
1	5				1
		5		$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}=\frac{120}{95\,940}\approx 0{,}00126$ (Aufg. c)	1
			5		1
2	4	1			5
	1	4			5
	4		1		5
	1		4		5
		4	1		5
		1	4		5
	3	2			10
	2	3		$\frac{3\cdot2\cdot5\cdot4\cdot3}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}=\frac{360}{95\,940}\approx 0{,}00379$ (Aufg. b)	10
	3		2	$\frac{3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot3}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}=\frac{72}{95\,940}\approx 0{,}00076$ (Aufg. a)	10
	2		3	$\frac{3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot2}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}=\frac{144}{95\,940}\approx 0{,}00152$ (Aufg. d)	10
		3	2	$\frac{5\cdot4\cdot3\cdot4\cdot3}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}=\frac{720}{95\,940}\approx 0{,}00758$ (Aufg. a)	10
		2	3		10
3	3	1	1		$20=\frac{5!}{3!}$
	1	3	1		20
	1	1	3		20
	1	2	2	$\frac{3\cdot5\cdot4\cdot4\cdot3}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}=\frac{720}{95\,940}\approx 0{,}00758$ (Aufg. a)	$30=\frac{5!}{2!\cdot2!}$
	2	1	2	$\frac{3\cdot2\cdot5\cdot4\cdot3}{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}=\frac{360}{95\,940}\approx 0{,}00379$ (Aufg. a)	30
	2	2	1		30

a) $$P(\text{genau 2 rote Kugeln})=10\cdot\frac{72}{95\,940}+10\cdot\frac{720}{95\,940}+30\cdot\frac{720}{95\,940}+30\cdot\frac{360}{95\,940}=\frac{40\,320}{95\,940}\approx 0{,}4242$$

b) $$P(\text{genau 2 blaue und 3 gelbe Kugeln})=10\cdot\frac{360}{95\,940}=\frac{3600}{95\,940}\approx 0{,}0379$$

84 **c)** $P(\text{5 gelbe Kugeln}) = \frac{120}{95\,940} \approx 0{,}00126$

d) $P(\text{3 rote und 2 blaue Kugeln}) = 10 \cdot \frac{144}{95\,940} = \frac{1440}{95\,940} \approx 0{,}0152$

13 X: Anzahl von „Zahl"; X kann die Werte $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 10$ annehmen.
Insgesamt gibt es 2^{10} verschiedene Ergebnisse. Davon sind $\binom{10}{k} = \frac{10!}{k! \cdot (10-k)!}$ günstig, denn von den 10 möglichen Stellen werden genau k ausgewählt.

k	$w(k) = \frac{\binom{10}{k}}{2^{10}}$
0	$\frac{1}{1024} \approx 0{,}000977$
1	$\frac{10}{1024} \approx 0{,}009766$
2	$\frac{45}{1024} \approx 0{,}043945$
3	$\frac{120}{1024} \approx 0{,}117188$
4	$\frac{210}{1024} \approx 0{,}205078$
5	$\frac{252}{1024} \approx 0{,}246094$
6	$\frac{210}{1024} \approx 0{,}205078$
7	$\frac{120}{1024} \approx 0{,}117188$
8	$\frac{45}{1024} \approx 0{,}043945$
9	$\frac{10}{1024} \approx 0{,}009766$
10	$\frac{1}{1024} \approx 0{,}000977$

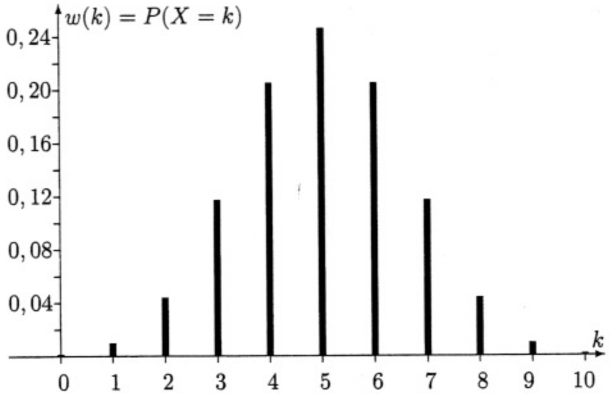

Bild 90/1: Grafische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung

14 Es gibt $\binom{7}{3} = 35$ Möglichkeiten.

15 a) Es gibt $\binom{10}{5} = 252$ Möglichkeiten, falls die Tische nicht unterschieden werden.

b) Es gibt $\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210$ Möglichkeiten, falls die Tische nicht unterschieden werden.

c) Es gibt $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{2} = 3150$ Möglichkeiten, falls die Tische nicht unterschieden werden.

d) Entweder nehmen zweimal vier und einmal zwei Personen Platz oder einmal vier und zweimal drei Personen.

Es gibt $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{2} + \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} = 7350$ Möglichkeiten, falls die Tische nicht unterschieden werden.

16 Nach 5 Schritten sind folgende Positionen mit angegebener Wahrscheinlichkeit möglich: 84

Position		Wahrscheinlichkeit
R_5	5 Schritte nach rechts	$1 \cdot 0{,}6^5 \approx 0{,}0776$
R_4	4 Schritte nach rechts, 1 Schritt nach unten	$5 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^1 \approx 0{,}2592$
R_3	3 Schritte nach rechts, 2 Schritte nach unten	$10 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 \approx 0{,}3456$
R_2	2 Schritte nach rechts, 3 Schritte nach unten	$10 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}2304$
R_1	1 Schritt nach rechts, 4 Schritte nach unten	$5 \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^4 \approx 0{,}0768$
R_0	5 Schritte nach unten	$1 \cdot 0{,}4^5 \approx 0{,}01024$

Das Feld C muss nach spätestens 7 Schritten erreicht sein.

R_5	C kann nicht erreicht werden.
$R_4 \xrightarrow{0,6} r$	C wird nicht erreicht.
$R_4 \xrightarrow{0,4} u$	C wird erreicht.
R_3	C ist erreicht.
$R_2 \xrightarrow{0,6} r$	C wird erreicht.
$R_2 \xrightarrow{0,4} u$	C wird nicht erreicht.
R_1	C kann nicht erreicht werden.
R_0	C kann nicht erreicht werden.

$P(C \text{ wird erreicht}) = 5 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 + 10 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6 \approx 0{,}58752$

17 a) Bei 10 Zügen sind 2^{10} Zugfolgen möglich.
10 dieser Zugfolgen enden an der Stelle 8.
Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Zugfolge beträgt $0{,}9^9 \cdot 0{,}1^1$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zugfolge an der Stelle 8 endet beträgt somit $10 \cdot 0{,}9^9 \cdot 0{,}1^1 \approx 0{,}3874$.

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von $n \cdot 0{,}9^{n-1} \cdot 0{,}1^1$ befindet sich der Punkt nach n Zügen an der Stelle $n-2$.

n	P_n(Punkt an der Stelle $n-2$)	n	P_n(Punkt an der Stelle $n-2$)
1	0,1	8	0,3826
2	0,18	9	0,3874
3	0,243	10	0,3874
4	0,2916	11	0,3835
5	0,328	12	0,3765
6	0,3542	13	0,3672
7	0,372		

Die Wahrscheinlichkeit P_n ist für $n = 9$ und für $n = 10$ am größten. Diese beiden Wahrscheinlichkeit sind exakt gleich, wie in $10 \cdot 0{,}9^9 \cdot 0{,}1^1 = 9 \cdot 0{,}9^8 \cdot 0{,}1^1$ sofort zu erkennen ist. Mit Methoden der Differentialrechnung gelangt man für die Funktion f zu $f(x) = 0{,}1x \cdot 0{,}9^{x-1}$ zur Extremstelle $x_E = \frac{-1}{\ln 0{,}9} \approx 9{,}4912$.

84 **18** Es gibt $\binom{6+30-1}{30} = 324\,632$ Möglichkeiten.

85 **19** Es können $\binom{3+3-1}{3} = 10$ verschiedene Gesamtwiderstände erzeugt werden.

Der größte Gesamtwiderstand ergibt sich, wenn 3 Widerstände zu 200 Ω parallel geschaltet werden; es gilt:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{200\ \Omega} \quad \Leftrightarrow \quad R_{\text{ges}} = 66,\overline{6}\ \Omega, \text{ also } R_{\text{ges}} \approx 67\ \Omega.$$

Der kleinste Gesamtwiderstand ergibt sich, wenn 3 Widerstände zu 50 Ω parallel geschaltet werden; es gilt:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{3}{50\ \Omega} \quad \Leftrightarrow \quad R_{\text{ges}} = 16,\overline{6}\ \Omega, \text{ also } R_{\text{ges}} \approx 17\ \Omega.$$

20 Es gibt $\binom{10+12-1}{12} = 293\,930$ Möglichkeiten.

21 a) Es gibt insgesamt $\binom{65+58}{13} \approx 1,23 \cdot 10^{17}$ Möglichkeiten.

b) Es gibt $\binom{65}{7} \cdot \binom{58}{6} \approx 2,82 \cdot 10^{16}$ Möglichkeiten, wenn dem Komitee genau 7 Schülerinnen angehören sollen.

22 Fall I: Anzahl der möglichen Stichproben insgesamt: $\binom{20}{3}$

Anzahl der möglichen Stichproben ohne defekte DVD: $\binom{18}{3}$

Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Stichprobe ohne defekte DVD}) = \frac{\binom{18}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{18! \cdot 3! \cdot 17!}{15! \cdot 3! \cdot 20!} \approx 0,7158$$

Fall II: Anzahl der möglichen Stichproben insgesamt: $\binom{200}{30}$

Anzahl der möglichen Stichproben ohne defekte DVD: $\binom{180}{30}$

Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{Stichprobe ohne defekte DVD}) = \frac{\binom{180}{30}}{\binom{200}{30}} = \frac{180! \cdot 30! \cdot 170!}{150! \cdot 30! \cdot 200!} \approx 0,0324$$

Im Fall I ist die Wahrscheinlichkeit recht hoch, dass eine Stichprobe ohne defekte DVD gezogen wird. Damit ist auch die Wahrscheinlichkeit groß, dass die Lieferung nicht abgelehnt wird.

Dagegen ist im Fall II die Wahrscheinlichkeit verschwindend klein, dass eine Stichprobe ohne defekte DVD gezogen wird. Damit ist aber die Wahrscheinlichkeit ebenfalls sehr gering, dass die Lieferung nicht abgelehnt wird. Die Lieferung wird also mit hoher Wahrscheinlichkeit abgelehnt.

23 a) Die Wahrscheinlichkeit, dass Jenny und Andreas ein Team bilden, beträgt $\frac{1}{7}$, 85
denn Jenny bekommt von 7 weiteren Teilnehmern genau einen Partner zugelost.

Auch die folgende Überlegung führt zum gleichen Ergebnis:

Es gibt 8! Möglichkeiten, die Startnummern A1, A2, B1, B2, C1, C2, D1 und D2 zu verteilen. Davon 6! ordnen Jenny A1 und Andreas A2 zu, ebenso 6! Andreas A1 und Jenny A2.

Da gleiche Anzahl jeweils für B1 und B2 sowie C1 und C2 und D1 und D2 auftreten, gelangt man zu insgesamt $8 \cdot 6!$ Möglichkeiten, dass Jenny und Andreas in einem Team spielen. Für die Wahrscheinlichkeit dafür folgt also $\frac{8 \cdot 6!}{8!} = \frac{1}{7}$.

b) Bild 93/1 zeigt das Baumdiagramm.

M: Jenny und Andreas spielen miteinander in einem Team.

$\overline{M}$: Jenny und Andreas spielen nicht miteinander in einem Team.

H: Die Teams von Jenny und Andreas spielen im Halbfinale gegeneinander.

$\overline{H}$: Die Teams von Jenny und Andreas spielen im Halbfinale nicht gegeneinander.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{7} \approx 0,2857$ spielen Jenny und Andreas im Halbfinale gegeneinander.

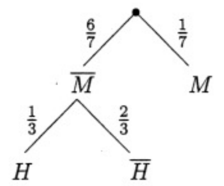

Bild 93/1: zu 23 b)

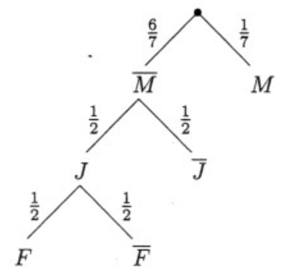

Bild 93/2: zu 23 c)

c) Bild 93/2 zeigt das Baumdiagramm.

M: Jenny und Andreas spielen miteinander in einem Team.

$\overline{M}$: Jenny und Andreas spielen nicht miteinander in einem Team.

J: Jennys Team gewinnt das Halbfinale und erreicht damit das Finale.

$\overline{J}$: Jennys Team gewinnt das Halbfinale nicht und erreicht damit nicht das Finale.

F: Jennys Team gewinnt das Finale.

$\overline{F}$: Jennys Team gewinnt das Finale nicht.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{14} \approx 0,2143$ gewinnt Jenny das Finale, Andreas aber nicht.

85 **24**

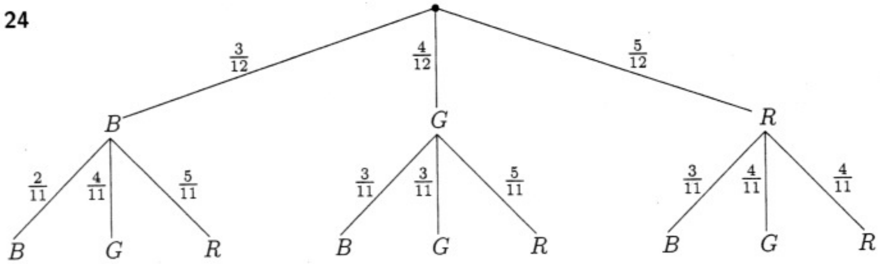

Bild 94/1: Ziehen von zwei Kugeln ohne Zurücklegen

Mithilfe eines Baumdiagramms gelangt man zu

$$P(2 \text{ gleiche Kugeln}) = P(B|B)+P(G|G)+P(R|R) = \frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11} = \frac{38}{132} = \frac{19}{66}.$$

Zum gleichen Ergebnis führt

$$P(2 \text{ gleiche Kugeln}) = \frac{\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{3+6+10}{132} = \frac{19}{66}.$$

25 Ereignisse:
H: Hauptgewinn wird gezogen.
$\overline{H}$: Hauptgewinn wird nicht gezogen.

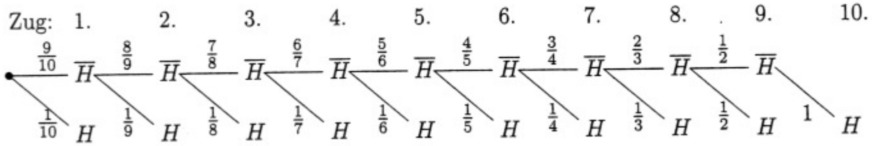

Bild 94/2: 10 von 10 Losen werden nacheinander gezogen

Aus dem Baumdiagramm von Bild 94/2 kann man ablesen, dass das Ziehen des Hauptgewinnes mit jedem Zug gleich wahrscheinlich ist, denn man erhält:

$$\begin{aligned}
P(H \text{ im } 1.\text{ Zug}) &= \tfrac{1}{10}\\
P(H \text{ im } 2.\text{ Zug}) &= \tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{1}{9} = \tfrac{1}{10}\\
P(H \text{ im } 3.\text{ Zug}) &= \tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{10}\\
P(H \text{ im } 4.\text{ Zug}) &= \tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{1}{7} = \tfrac{1}{10}\\
P(H \text{ im } 5.\text{ Zug}) &= \tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{10}\\
P(H \text{ im } 6.\text{ Zug}) &= \tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{10}\\
P(H \text{ im } 7.\text{ Zug}) &= \tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{10}\\
P(H \text{ im } 8.\text{ Zug}) &= \tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{10}\\
P(H \text{ im } 9.\text{ Zug}) &= \tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{10}\\
P(H \text{ im } 10.\text{ Zug}) &= \tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1 = \tfrac{1}{10}
\end{aligned}$$

26) Ereignisse: 6: Es wird eine 6 gewürfelt; $\overline{6}$: Es wird keine 6 gewürfelt 85
A: A gewinnt; B: B gewinnt; C: C gewinnt

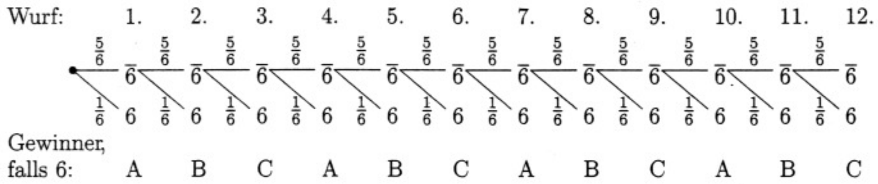

Bild 95/1: Drei Personen A, B, C Würfeln abwechselnd. Wer hat die erste 6?

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^6\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^9\cdot\frac{1}{6} \approx 0,3512\\
P(B) &= \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{10}\cdot\frac{1}{6} \approx 0,2927\\
P(C) &= \left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^8\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{11}\cdot\frac{1}{6} \approx 0,2439\\
P(\text{keiner gewinnt}) &= \left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 0,1122
\end{aligned}$$

27) Ereignisse: F: Bauteil funktioniert; $\overline{F}$: Bauteil funktioniert nicht.
$P(F) = p$ ist die Wahrscheinlichkeit, mit der jedes der Bauteile funktionstüchtig ist. Mit der Wahrscheinlichkeit $P(\overline{F}) = 1-p$ funktioniert es also nicht.

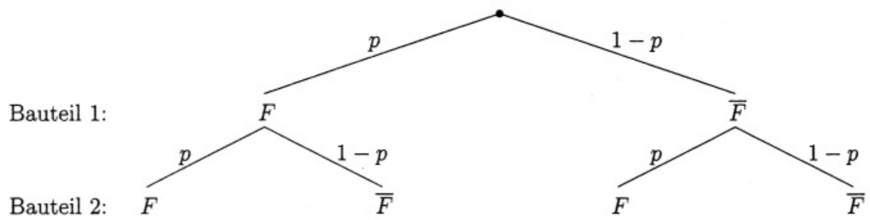

Bild 95/2: Das System besteht aus zwei unabhängigen Bauteilen.

Das System funktioniert nur dann nicht, wenn beide Bauteile defekt sind. Da das System mindestens mit der Wahrscheinlichkeit 0,999 92 funktionieren soll, muss gelten:

$$\begin{aligned}
P(\text{beide Teile defekt}) = (1-p)^2 &< 1 - 0,999\,92 = 0,000\,08, \quad \text{also}\\
1-p &< \sqrt{0,000\,08} \approx 0,008\,994 \quad \text{da } 1-p > 0\\
p &> 0,991056
\end{aligned}$$

Wenn die Wahrscheinlichkeit p, dass ein einzelnes Bauteil intakt ist, größer als 0,991 056 ist, dann funktioniert das System mit einer Wahrscheinlichkeit von mindesten 0,999 92. D.h., wenn das einzelne Bauteil mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1 % ausfällt, dann fällt das System nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,0001 % aus.