Lösungsskizze KA 13/1 MA1 2007/08
Aufgabe 1

$$f_n(x) = (x-1)^n \cdot e^{nx} \qquad n \in \mathbb{N} \text{ gerade}, \; n \geq 2$$

1.1
$$f_n'(x) = n(x-1)^{n-1} e^{nx} + (x-1)^n \cdot n \cdot e^{nx}$$
$$= n \cdot (x-1)^{n-1} \cdot x \cdot e^{nx}$$

$$f_n''(x) = n \cdot (n-1)(x-1)^{n-2} \cdot x \cdot e^{nx}$$
$$+ n(x-1)^{n-1} e^{nx}$$
$$+ n(x-1)^{n-1} \cdot \cancel{x} \cdot n \cdot e^{nx}$$

$$= n \cdot (x-1)^{n-2} e^{nx}$$
$$\cdot \left((n-1)x + (x-1) + (x-1) \cdot x \cdot n\right)$$

$$= n(nx^2 - 1)(x-1)^{n-2} e^{nx}$$
$$= n^2 \left(x^2 - \frac{1}{n}\right)(x-1)^{n-2} e^{nx}$$

Nullstellen: $x_0 = 1$, denn $e^{nx} \neq 0 \;\forall x$

Symmetrie: —

Asymptote: x-Achse ist Asymptote für $x \to -\infty$

Extremstellen: Kandidaten sind Nullstellen von f_n', also kommen nur $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$ in Frage.
Der Faktor „x" in der Ableitung sorgt für einen Vorzeichenwechsel bei $x_2 = 0$ und ~~der Faktor~~ da $n-1$ ungerade ist, sorgt der Faktor „$(x-1)^{n-1}$" auch bei $x_1 = 1$ für einen Vorzeichenwechsel.

Also sind beide Kandidaten tatsächlich Extremstellen.

Da die x-Achse Asymptote für $x \to -\infty$ ist, muss notwendig bei $x_2 = 0$ ein Maximum und bei $x_1 = 1$ ein Minimum vorliegen

(anderes Argument: Da $f(x) \geq 0$ für alle x, ist die Nullstelle $x_1 = 1$ globales Minimum und deshalb bei $x_2 = 0$ ein Maximum)

Aus diesen Überlegungen folgt sofort, dass auch zwei Wendestellen existieren müssen und zwar eine $x_3 < 0$ und eine ~~zw~~ $0 < x_4 < 1$

Man liest bei f'' direkt ab:

$$x_3 = -\sqrt{\frac{1}{n}} \text{ und } x_4 = +\sqrt{\frac{1}{n}}$$

1.2

$$\sqrt{\frac{1}{n}} \longmapsto f_n\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{n}} \quad \cancel{\Leftrightarrow} \Rightarrow \quad n = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Also } x \longmapsto (x-1)^{\frac{1}{x^2}} \cdot e^{\frac{1}{x^2} \cdot x}$$

$$= (x-1)^{\frac{1}{x^2}} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

1.3 $$f_2(x) = (x-1)^2 \cdot e^{2x}$$

partielle Integration liefert

$$\int \underset{f}{(x-1)^2}\, \underset{g'}{e^{2x}}\, dx = \left[\tfrac{1}{2}(x-1)^2 e^{2x}\right] - \int 2(x-1)\, e^{2x} \cdot \tfrac{1}{2}\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}(x-1)^2 e^{2x}\right] - \left(\left[\tfrac{1}{2}(x-1) e^{2x}\right] - \int 1 \cdot \tfrac{1}{2} e^{2x}\, dx\right)$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}(x-1)^2 e^{2x}\right] - \left[\tfrac{1}{2}(x-1)\, e^{2x}\right] + \left[\tfrac{1}{4} e^{2x}\right]$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 1 - x + 1 + \tfrac{1}{2}\right) e^{2x}\right]$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}\left(x^2 - 3x + \tfrac{5}{2}\right) e^{2x}\right]$$

Somit $F(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 3x + \frac{5}{2}\right) e^{2x} + c$

1.4 Aus der Skizze ist ersichtlich, dass

$$A = \int_0^1 f_2(x)\, dx = F(1) - F(0)$$

$$\cancel{\approx 0,6}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1 - 3 + \tfrac{5}{2}\right) e^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{5}{2}\right) \cdot 1$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(e^2 - 5\right) \approx 0,6$$

1.5 $$A(u) = \int_u^0 f_2(x)\, dx = F(0) - F(u)$$

$$= \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{2}\left(u^2 - 3u + \tfrac{5}{2}\right) e^{2u}$$

1.6 Man sieht sofort:

$$\int_{-\infty}^0 f_2(x)\, dx = \lim_{u \to -\infty} A(u) = \frac{5}{4}$$

1.7. Es gilt

$G(0) = 0$, also besitzt G mindestens eine Nullstelle

Wegen $G'(x) = f_2(x) \geq 0$ ist G monoton steigend und da $G'(0) = f_2(0) > 0$ ist G in einer Umgebung der 0 sogar streng monoton steigend. Also ist 0 die einzige Nullstelle.

Extremstellen gibt es wegen der Monotonie keine, aber da f_2 genau eine Nullstelle besitzt, hat G genau eine Stelle mit waagrechter Tangente, nämlich $x_1 = 1$.