

Bilder von Geraden bei affinen Abbildungen

Sei $\alpha: \vec{x} \mapsto M \cdot \vec{x} + \vec{v}$ eine affine Abbildung
und $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{r}$ eine Gerade mit
Stützvektor $\vec{p}$ und Richtungsvektor $\vec{r}$.

Wir untersuchen das Bild der Geraden, d.h. $\vec{x}'$
für einen Punkt $\vec{x}$ auf der Geraden.

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= M \cdot (\vec{p} + t \cdot \vec{r}) + \vec{v} \\ &= M \cdot \vec{p} + M \cdot t \cdot \vec{r} + \vec{v} \\ &= \underbrace{M \cdot \vec{p} + \vec{v}}_{\substack{\text{Stützvektor} \\ \text{der} \\ \text{Bildgeraden}}} + t \cdot \underbrace{M \cdot \vec{r}}_{\substack{\text{Richtungsvektor} \\ \text{der} \\ \text{Bildgeraden}}}\end{aligned}$$

Das Bild einer Geraden unter einer aff. Abb. ist wieder eine Gerade.

$$\text{Bsp: } \alpha: \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 0,5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}g' = \alpha(g): \vec{x}' &= \begin{pmatrix} 0,5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5,5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4,5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 3,5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4,5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

