

Eigenwerte und Eigenvektoren bei Spiegel- und Drehmatrizen

Spiegelmatrizen:

$$S = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(S - \lambda E) &= (\cos(2\alpha) - \lambda)(-\cos(2\alpha) - \lambda) - \sin^2(2\alpha) \\ &= -\cos^2(2\alpha) - \cancel{\lambda \cos(2\alpha)} + \cancel{\lambda \cos(2\alpha)} + \lambda^2 - \sin^2(2\alpha) \\ &= \lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$

EV zu $\lambda_1 = 1$:

$$S \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_1$$

$$(S - 1 \cdot E) \cdot \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} c-1 & s & 0 \\ s & -c-1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot s \\ | \cdot (c-1) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} s \cdot (c-1) & s^2 & 0 \\ s \cdot (c-1) & (-c-1) \cdot (c-1) & 0 \end{array} \right)$$

| Dies geht nicht
bei $s = \sin(2\alpha) = 0$,
also bei $\alpha = 90^\circ$!

Dieser Fall ist aber
leicht.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} s \cdot (c-1) & s^2 & | & 0 \\ s \cdot (c-1) & 1-c^2 & | & 0 \end{pmatrix} - I$$

Nun gilt
 $s^2 + c^2 = 1$
 wg. Sinus und Cosinus

$$\rightarrow \begin{pmatrix} s \cdot (c-1) & s^2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Für den EV $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ muss also gelten

$$s \cdot (c-1) \cdot x + s^2 \cdot y = 0$$

$$(c-1) \cdot x + s \cdot y = 0$$

also z.B. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -s \\ c-1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-c}{s} \end{pmatrix}$

$$\frac{1-c}{s} = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}$$

Es wäre zu erwarten, dass $\frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} = \tan \alpha$,
 denn dieser EV gehört zur Spiegelachse und
 diese hat die Steigung $\tan \alpha$.

↳ Additionstheoreme für sin und cos

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Für $\beta = \alpha$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \\ &= 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)\end{aligned}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\begin{aligned}\text{Somit } \frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)} &= \frac{1 - (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))}{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)} \\ &= \frac{(1 - \cos^2(\alpha)) + \sin^2(\alpha)}{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)} = \frac{\sin^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)} \\ &= \frac{2 \sin^2(\alpha)}{2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)\end{aligned}$$

Damit hat der Eigenvektor zum EW $\lambda_1 = 1$ tatsächlich die Richtung der Spiegelachse.

EV zu $\lambda_2 = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} c+1 & s & 0 \\ s & -c+1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{wie oben}} \left(\begin{array}{cc|c} c+1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{also } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -s \\ c+1 \end{pmatrix}$$

Wir zeigen dies jetzt nicht, aber tatsächlich steht $\vec{v}_2$ senkrecht auf $\vec{v}_1$. Dieser EV gehört zu den Fixgeraden senkrecht zur Spiegelachse.

Drehmatrizen

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\det(\mathbb{D} - \lambda E) \\ = (c - \lambda)^2 + s^2$$

Es kann nur Nullstellen geben, wenn $s^2 = 0$,
also $\sin(\alpha) = 0$, d.h. $\alpha = 0^\circ$ oder $\alpha = 180^\circ$

$\alpha = 0^\circ$: Hier ist $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$. Somit
ist jeder Vektor Eigenvektor zum EW 1

$\alpha = 180^\circ$: Hier ist $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$

Jeder Vektor ist Eigenvektor zum EW -1