$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \quad \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{1.41} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{1.42}$

$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 \quad \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{1.414} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{1.415}$

$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 \quad \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{1.4142} > \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{1.4143}$

$\Downarrow$

näher an $\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}} \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{1.4142}$

9 Vermischte Aufgaben

S. 26 **1** a) $3{,}4 \cdot 10^5$ b) $5{,}98 \cdot 10^4$ c) $3{,}62 \cdot 10^{-3}$ d) $7{,}37 \cdot 10^{-5}$
e) $2{,}5 \cdot 10^5$ f) $6{,}3 \cdot 10^{-5}$ g) $8 \cdot 10^3$ h) $3{,}456 \cdot 10^{-2}$

2 a) $6{,}8 \cdot 10^{-4}$ b) $2{,}4 \cdot 10^{-3}$ c) $1{,}36 \cdot 10^{-3}$ d) $1{,}5 \cdot 10^3$
e) 10^{-10} f) $0{,}35$ g) $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ h) 8

3 a) $x^{\frac{3}{4}+1} = x^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{x^7}$ b) $y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y}}$
c) z d) $3^{\frac{1}{2}k} = \sqrt{3^k}$
e) $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$ f) $t^{\frac{1}{2}n} = \sqrt{t^n}$
g) 5^k h) $2^3 \cdot 4^3 \cdot 4^{-3} = 2^3 = 8$
i) x^{1-r} k) $a^{t-t} = a^0 = 1 \quad a \neq 0$
l) $b^{2r+\frac{1}{r}}$ m) $1 : 2^c = 2^{-c}$
n) y^{3s} o) $z^{x+1-x} = z$
p) $r^{t-t+1} = r$ q) $r^s \cdot \frac{1^s}{r^s} = 1^s = 1$
r) 4 s) $36x^2 : 4x^2 = 9$

4 a) $x^{1-n+1-n} = x^0 = 1 \quad x \neq 0$ b) $2y^{1-k-k} = 2y^{1-2k}$
c) $2^r \cdot z^r : z^{-r} = 2^r \cdot z^{2r}$ d) $4^n \cdot a^{2n} \cdot 2 \cdot a^{-n} = 2 \cdot (4a)^n$
e) $x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}} = x^0 = 1 \quad x \neq 0$ f) $y^{-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}} = y^{-\frac{2}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{y^2}}$
g) a^{1+n} h) $2e^{-x+1} = 2e^{1-x}$

5 a) $\frac{15^{-4} \cdot x^{-8} \cdot y^{12}}{25^{-2} \cdot x^{-6} \cdot y^{12}} = \frac{1}{81} \cdot x^{-2}$ b) $\frac{8^{-2}a^{-6}b^6}{12^{-3}a^6b^{12}} = 27a^{-12}b^{-6}$
c) $\frac{9u^8v^{-2}}{9^{-1}u^2v^3} = 81u^6v^{-5}$ d) $\frac{2^{-3}p^{18}q^{-9}}{2^4p^{20}q^{-8}} = \frac{1}{128p^2q}$

6 a) $\frac{4x^2-16x+16}{4} = \frac{x^2-4x+4}{1} = (x-2)^2$
b) $\frac{5^3 \cdot (1-2y)^3}{5^2} = 5 \cdot (1-2y)^3$
c) $\frac{3^{-1} \cdot (1-2z)^{-1}}{(1-2z)^{-3}} = \frac{1}{3} \cdot (1-2z)^2$
d) $\frac{6^3 \cdot (2-3x)^3}{(3x-2)^5} = \frac{-6^3 \cdot ((-2)+3x)^3}{(3x-2)^5} = -6^3 \cdot (3x-2)^{-2}$
e) $(1-2x)^6$
f) $[(2-5y)(5y-2)]^3 = (-(5y-2)^2)^3 = -(5y-2)^6$
g) $(3y-x)^2 \cdot (3y-x)^4 = (3y-x)^6$
h) $(-1)^{-1} \cdot (3y-2x)^{-1} \cdot (3y-2x)^{-3} = -(3y-2x)^{-4}$
i) $\frac{1}{1-x^4} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{(1-x^4)(x^4+2x^2+1)} = \frac{1}{1+2x^2-2x^6-x^8}$
k) $\frac{3(5-y)^{-2}}{(-3)(5-y)^1} = -(5-y)^{-3}$
l) $\frac{2a^2}{(2a)^2(4a^2-1)^2} = \frac{1}{2(4a^2-1)^2}$
m) $\frac{(4x^{2n}-1) \cdot (4x^{2n}-1)^2}{(2x^n-1)^2} = (4x^{2n}-1)(2x^n+1)^2$

7 a) $a^8b^4c^5 + ab^5c^7 - a^5b^3c^4$ b) $qs^{-2} + p^3q^{-1}r^3s^{-3} + p^5q^{-4}r^2s^{-4} + p^3q^{-7}r^3s^{-4}$
c) $y^{-1}z^2 + x^{-3}y^{-2}z^3 + xy$ d) $(v^{-2}w^2 - u^8w^{-8} + u^5v^6w^{-6})$
e) $d^{\frac{10}{3}}e^{\frac{4}{3}}f^{\frac{3}{2}} + e^{\frac{11}{6}}f^{-\frac{9}{10}} - d^3ef^{-\frac{5}{2}} = (d^{\frac{1}{3}}e^{\frac{1}{3}}f^4 + d^{-3}e^{\frac{5}{6}}f^{\frac{8}{5}} - 1) \cdot d^3ef^{-\frac{5}{2}}$
f) $s^{\frac{29}{5}}t^{\frac{14}{5}}u^{-10}v^{\frac{7}{8}} + s^6t^{-\frac{26}{5}}v^{-\frac{11}{2}}u^{-7} + t^{-\frac{1}{5}}u^{-11}v^{\frac{3}{2}}$
$= (s^{\frac{29}{5}}t^3u^{-3}v^{\frac{7}{8}} + s^6t^{-5}v^{-\frac{11}{2}} + u^{-4}v^{\frac{3}{2}}) : (t^{-\frac{1}{5}}u^7)$

8 a) $u\sqrt{u}\,v + v\sqrt{uvw}$

b) $(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}z - xy^{\frac{3}{4}}z^{\frac{1}{4}}) \cdot (y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{4}}z^{\frac{5}{4}} - xyz^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{xy^2z^5} - xy\sqrt{z}$

c) $(p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}}q^{\frac{1}{4}}) \cdot (\frac{p^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}}) = p + p^{\frac{3}{4}}q^{-\frac{1}{4}} = p + \sqrt[4]{\frac{p^3}{q}}$

d) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ e) $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}$ f) $\sqrt[5]{\frac{v^3}{u}} - v\sqrt[5]{v}$

9 a) $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{50} - \sqrt[3]{20} - \sqrt[3]{8} = 3 + \sqrt[3]{50} - \sqrt[3]{20}$

b) $\sqrt[4]{24} - \sqrt[4]{16} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{54} = 1 + \sqrt[4]{24} - \sqrt[4]{54}$

c) $\sqrt{2x^2} - \sqrt{2xy} + \sqrt{2xy} - \sqrt{2y^2} = \sqrt{2x^2} - \sqrt{2y^2} = \sqrt{2}\,|x| - \sqrt{2}\,|y|$

d) $xa - x\sqrt{x}\,\sqrt{a} + a\sqrt{a}\,\sqrt{x} - ax = a\sqrt{ax} - x\sqrt{ax} = \sqrt{ax}\,(a-x)$

e) $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{b^3} = a + b$

f) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$

S. 27 **10** a) $7 - 6 = 1$ b) $50 - 20 = 30$

c) $x + h - x = h$ d) $a^2 - (a^2 - b^2) = b^2$

e) $\frac{(x-y)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

f) $\frac{(a\sqrt{ax} - x\sqrt{ax})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{x})}{a-x}$
$= \frac{\sqrt{ax}\cdot(a-x)\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{x})}{a-x}$
$= \sqrt{ax}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right) = |a|\,\sqrt{x} + |x|\,\sqrt{a}$

11 a) $\frac{4x^2\cdot\sqrt[3]{(2x)^2}}{\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[3]{(2x)^2}} = 2x\sqrt[3]{4x^2}$ b) $\frac{6a\cdot\left(\sqrt[4]{2a^3}\right)^3}{2a^3} = 3a^{-2}(\sqrt[4]{2a^3})^3 = 3\sqrt[4]{8a}$

c) $\frac{18b\cdot(\sqrt[3]{9b})^2}{9b} = 2\left(\sqrt[3]{9b}\right)^2 = 6\left(\sqrt[3]{3b^2}\right)$

d) $\frac{(a\sqrt{b} + b\sqrt{a})\,(\sqrt{ab})}{ab} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

e) $\frac{\sqrt{3a-2b}}{3a-2b}$ f) $\frac{(3\sqrt{a}+5\sqrt{b})\,(5\sqrt{b}+3\sqrt{a})}{25b-9a} = \frac{(3\sqrt{a}+5\sqrt{b})^2}{25b-9a}$

g) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{x-7}$ h) $\frac{\sqrt{x+\sqrt{7}}\cdot(x-\sqrt{7})}{x^2-7}$

12 a) $\frac{x^n\cdot(1-x^2)}{x^n\cdot(1+x^{-1})} = \frac{1-x^2}{1+x^{-1}} = x\,(1-x)$ b) $\frac{a^k\cdot(a^2-k^2)}{a^k\cdot(1-ka^{-1})} = \frac{a^2-k^2}{1-ka^{-1}} = a\,(a+k)$

c) $\frac{t^{2x}\cdot(t^{3x}-t^x)}{t^{2x}\cdot(t^{x+1}-t)} = \frac{t^{3x}-t^x}{t^{x+1}-t}$ d) $\frac{(1-2a^r)\,(1+2a^r)}{a\cdot(1+2a^r)} = \frac{1-2a^r}{a}$

e) $\frac{a\cdot(9a^{2x}-1)}{a\cdot(a-3a^{x+1})} = \frac{9a^{2x}-1}{a\cdot(1-3a^x)} = \frac{(3a^x+1)\,(3a^x-1)}{-a\cdot(3a^x-1)} = -\frac{3a^x+1}{a}$

f) $\frac{2x^t(1-x^t)}{3\,(1-x^t)} = \frac{2x^t}{3}$

g) $\frac{e^x\cdot(e-e^{-2x+1})}{e^x\cdot(e^{-2x}-1)} = \frac{e^{-x}(e^{2x+1}-e^1)}{e^{-x}(1-e^{2x})} = \frac{e\,(e^{2x}-1)}{-1\,(e^{2x}-1)} = -e$

h) $\frac{y^{-n}\cdot(y^{-2n}-x^{-2n})}{y^{-n}\cdot(y^{-n}x^{-n}-y^{-2n})} = \frac{y^{-n}+x^{-n}}{y^{-n}}$

13 a) $\frac{(x^{-k}-1)\cdot x^k-(1-x^k)}{(1-x^k)\cdot x^k} = \frac{1-x^k-1+x^k}{x^k-x^{2k}} = 0$

b) $\frac{(x^{-r}-r^{-x})\cdot(r^x\cdot x^r)-r^x+x^r}{(r^x-x^r)\cdot r^xx^r} = \frac{r^x-x^r-r^x+x^r}{r^{2x}x^r-x^{2r}r^x} = 0$

c) $x^{2n} - 2 + \frac{1}{x^{2n}} - x^{-2n} = x^{2n} - 2$

d) $\frac{(1+2x)\cdot(2x)-1\,(4x^2)+(1-2x)}{4\cdot x^{n+1}} = \frac{1}{4x^{n+1}}$

e) $\frac{(1-a^p)\,(3-a^p)-(1-a^p)\,(1+a^p)+2\,(1+a^p)\,(3-a^p)}{(1+a^p)\,(3-a^p)}$
$= \frac{3-a^p-3a^p+a^{2p}-1+a^{2p}+6-2a^p+6a^p-2a^{2p}}{3-a^p+3a^p-a^{2p}} = \frac{8}{3+2a^p-a^{2p}}$

f) $\frac{y^{n-2}\cdot(1+y)-y^{n-1}(1-y)-y^n}{1-y^2} = \frac{y^{n-2}+y^{n-1}-y^{n-1}+y^n-y^n}{1-y^2} = \frac{y^{n-2}}{1-y^2}$

g) $\frac{t^n\cdot(t^{n-1}-2)-(t^n-2)\,(t^{n-1}-2)+t^2(t^n-2)}{(t^n-2)\,(t^{n-1}-2)}$
$= \frac{t^{2n-1}-2t^n-t^{2n-1}+2t^n+2t^{n-1}-4+t^{2+n}-2t^2}{t^{2n-1}-2t^n-2t^{n-1}+4} = \frac{2t^{n-1}+t^{2+n}-2t^2-4}{t^{2n-1}-2t^n-2t^{n-1}+4}$

h) $\frac{2x+x-2}{2x^{n+1}} = \frac{3x-2}{2x^{n+1}}$

i) $\frac{y^2-1-(y^2-1)}{y^{2n}-1} = 0$

14 a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{23}{12}} = \sqrt[12]{a^{23}}$ b) $a \cdot (a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}) = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

c) $\sqrt[6]{a}$ d) $\sqrt[4]{a \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

15 $5{,}6 \cdot 10^{11}$ Eier werden in $5{,}6 \cdot 10^{11} : 10 = 5{,}6 \cdot 10^{10}$ Kartons verpackt.
$6\ \text{cm} = 6 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3}\ \text{km} = 6 \cdot 10^{-5}\ \text{km}$
Höhe = Anzahl Kartons · Höhe Karton
$h = 5{,}6 \cdot 10^{10} \cdot 6 \cdot 10^{-5}\ \text{km}$
$h = 3\,360\,000\ \text{km}$
Die Höhe des Stapels der Kartons der Jahres–Eierproduktion im Jahr 1992 würde 3,36 Millionen km betragen.

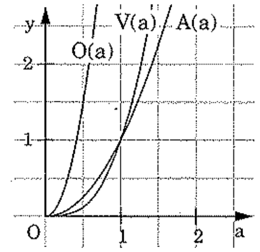
16 $1\text{s} \mathrel{\hat{=}} 3 \cdot 10^5\ \text{km}$
$1\ \text{Jahr} = 3{,}1536 \cdot 10^7\ \text{s} \mathrel{\hat{=}} x\ \text{km}$
Entfernung(s):
$s = 2{,}7 \cdot 10^6 \cdot \frac{3{,}1536 \cdot 10^7\text{s} \cdot 3 \cdot 10^5\text{km}}{1\text{s}}$
$s = 2{,}554416 \cdot 10^{19}\ \text{km}$
Der Andromeda-Nebel ist etwa $2{,}5 \cdot 10^{19}$ km entfernt.
$d = 163\,000 \cdot \frac{3{,}1536 \cdot 10^7\text{s} \cdot 3 \cdot 10^5\text{km}}{1\text{s}} = 1{,}5421104 \cdot 10^{18}\ \text{km}$

17 $c = 3 \cdot 10^5\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$
$c = \frac{s}{t}$; $t = \frac{s}{c}$
$t = \frac{10^{-4}\text{km}}{3 \cdot 10^5 \text{kms}^{-1}} = 3{,}\overline{3} \cdot 10^{-10}\ \text{s}$
Das Teilchen existiert etwa $3{,}3 \cdot 10^{-10}$ s.

II Potenzfunktionen

1 Potenzfunktionen der Form $x \mapsto x^n$

S. 32 **1** a) Die Streckenlängen betragen beim Modell $\frac{1}{8}$ der Längen des Originals. Die Flächeninhalte ändern sich auf $\frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$ und die Volumen auf $\frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$.
b) a sei die Kantenlänge des Würfels.
$A(a) = a^2$; $x > 0$
$O(a) = 6a^2$; $x > 0$
$V(a) = a^3$; $x > 0$



S. 33 **2** a) $0{,}0000001 = 0{,}1^7$ P liegt auf dem Graphen von $x \mapsto x^7$
b) $2\,187 = 3^7$ P liegt auf dem Graphen von $x \mapsto x^7$
P liegt nicht auf dem Graphen von $x \mapsto x^6$
c) P liegt auf keinem der beiden Graphen ($(-5)^6 \neq -78\,125 \neq (-5)^7$).
P liegt nicht auf dem Graphen von $x \mapsto x^6$
d) P liegt auf keinem der beiden Graphen ($(-4)^6 \neq 4\,096 \neq (-4)^7$).
e) $1 = 1^6 = 1^7$ P liegt auf den Graphen von $x \mapsto x^6$ und $x \mapsto x^7$

3 a) $Q(3 \mid 243)$ b) $Q(-3 \mid -243)$ c) $Q(-2 \mid -32)$
d) $Q(4 \mid 2^{10})$ e) $Q(7^3 = 343 \mid 7^{15})$

4 Für alle Funktionen dieser Form gilt: $0 \mapsto 0$ und $1 \mapsto \sqrt{17}$.

5 a) Die drei gemeinsamen Punkte sind:
$P_1(-1 \mid 5)$; $P_2(0 \mid 0)$; $P_3(1 \mid 5)$.
b) Die drei gemeinsamen Punkte sind:
$P_1(-1 \mid -5)$; $P_2(0 \mid 0)$; $P_3(1 \mid 5)$.

S. 34 **6** a) $x \in \,]0; \sqrt[3]{10}\,[$ b) $x \in \,]-\sqrt[4]{10}; \sqrt[4]{10}\,[\setminus \{0\}$
c) $x \in \,]0; \sqrt[7]{10}\,[$ d) $x \in \,]-\sqrt[8]{10}; \sqrt[8]{10}\,[\setminus \{0\}$

7 a) $|x| > 100$ ($|x| < \sqrt[3]{10^{-7}} \approx 0{,}004642$)
b) $|x| > \sqrt[4]{\frac{10^6}{3}} \approx 24{,}03$ ($|x| < \sqrt[4]{\frac{10^{-7}}{3}} \approx 0{,}01351$)